Géométrie du plan

Bernadette Perrin-Riou

Ce document est conçu comme une initiation à la géométrie du plan et une introduction à l'utilisation des groupes. Ce travail mène naturellement à l'étude des frises et des pavages, ce qui est abordé dans un autre document.

Il a été développé au fil d'un cours d'ouverture à l'intention d'étudiants de L1 et L2 comme une promenade dans la géométrie du plan.

CHAPITRE 1

De la géométrie aux groupes

I. *Géométrie et géométrie*

- La géométrie des triangles, de droites, des figures : Les grecs *calculent* avec la géométrie (construire le nombre dont le carré est 5, trouver le pgcd de deux nombres).

  [Euclide] « *Couper une droite donnée, de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments, soit égal au carré du segment restant.* »

  Dessin

  [Descartes] « *Soit AB l'unité et qu'il faille multiplier BD par BC, je n'ai qu'à joindre les points A et C, puis tirer DE parallèle à CA, et BE est le produit de cette multiplication.* »
  « *Ou s'il faut tirer la racine carrée de GH, je lui ajoute en ligne droite FG, qui est l'unité, et en divisant FH en deux parties égales au point K, du centre K, je tire le cercle FIH, puis élevant du point G une ligne droite jusques à I à angles droits sur GH ; c'est GI la racine cherchées* »

  Dessin

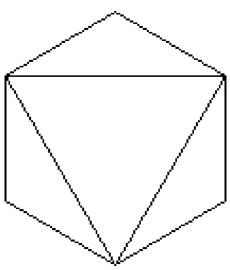
- La géométrie analytique ou cartésienne : on repère un point par ses coordonnées (x,y). Une droite a une équation $ax+by+c=0$, on donne des expressions analytiques pour les transformations.

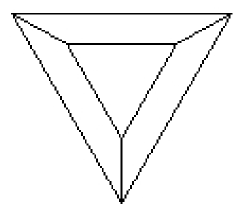
  Exemple I.1. Trouver anaytiquement le point d'intersection de la droite passant par $A(1,2)$ et $B(0,1)$ et de la droite d'équation $y=2x+1$.

  Résolution

- La géométrie devient algèbre : on s'intéresse aux structures, aux transformations plutôt qu'aux objets et à leurs propriétés.

  Ainsi les dessins sont les « mêmes » du point de vue de leur groupe de symétrie.





II. *Groupes : Introduction*

II.1. Exemples de groupes

Commençons par des exemples « arithmétiques » ou « numériques » : relatifs, réels ou rationnels :

a -. Les nombres Soit $K=\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres relatifs ou $K=\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels ou $K=\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. Pour tous éléments x, y, z de K

(1) $x+y\in K$;
(2) $(x+y)+z=x+(y+z)$;
(3) $0+x=x+0=x$;
(4) il existe un élément $x'\in K$ tel que $x+x'=x'+x=0$.

b -. Les racines de l'unité Soit n un entier ≥ 1. Soit μ_n l'ensemble des nombres complexes

$$z_k=e^{2ik\pi/n}=\cos(2k\pi/n)+i\sin(2k\pi/n)$$

pour $k\in\mathbb{Z}$. C'est aussi l'ensemble des nombres complexes z vérifiant $z^n=1$. Il vérifie pour z dans μ_n et k et j enties

(1) $z^k\times z^j=z^{k+j}$;
(2) $(z^k\times z^j)\times z^r=z^k\times(z^j\times z^r)$;
(3) $1\times z^k=z^k\times 1=z^k$;
(4) $z^{-k}\times z^k=1$.

Autrement dit, pour tous éléments z, z', z'' de μ_n

(1) $z \times z' \in \mu_n$;
(2) $(z \times z') \times z'' = z \times (z' \times z'')$;
(3) $1 \times z = z$;
(4) il existe un élément $t \in \mu_n$ tel que $z \times t = t \times z = 1$.

Exercice 1. Dessiner μ_4, μ_5, μ_6, μ_7 ... Pour μ_7, prendre $z_2 = e^{4i\pi/7}$ et repérer successivement les produits $z \times z_2$ pour $z \in \mu_7$: $z = z_0$, $z = z_1$, $z = z_2$, ...

Des manipulations sur trois boules permettent aussi de trouver un groupe :

c -. Permutations

(Lire la BD de Stewart : *Ah les beaux groupes - les chroniques de Rose Polymath (Belin)*)

On a trois boules alignées. On peut ne pas changer leur ordre. C'est l'opération identité S_0. On peut changer leur ordre en échangant les deux premières (opération S_1), en faisant tourner les trois dernières (opération S_2) et en effectuant ces opérations successivement. Donner le résultat comme un tableau : si une opération nouvelle apparaît, lui donner un nom (S_3, ...) et la rajouter.

S_0 *transforme 1,2,3 en 1,2,3*
S_1 *transforme 1,2,3 en 2,1,3*
S_2 *transforme 1,2,3 en 2,3,1*
S_3 *transforme 1,2,3 en ...*
S_4 *transforme 1,2,3 en ...*

	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	...	
S_0									
S_1									
S_2									
S_3									
S_4									
S_5									
S_6									
...									

On appelle ces opérations des *permutations* de l'ensemble des trois boules.

On note $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}$ la permutation qui transforme 1, 2, 3 en a, b, c. Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ est la permutation qui transforme 1, 2, 3 en 2, 3, 1.

Enfin, voici un exemple de groupe formé d'applications.

d -. Applications Soient les applications suivantes définies sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}$:

$f_1 : z \mapsto z$	$f_4 : z \mapsto$	$f_7 : z \mapsto$
$f_2 : z \mapsto -1/z$	$f_5 : z \mapsto$	$f_8 : z \mapsto$
$f_3 : z \mapsto -1/(z+1)$	$f_6 : z \mapsto$	$f_9 : z \mapsto$

On peut composer ces applications ; donner le résultat comme un tableau : si une application nouvelle apparaît, lui donner un nom et la rajouter.

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
f_1							
f_2							
f_3							
f_4							
f_5							
f_6							
f_7							

Pouvez-vous vous arrêter ?

II.2. Groupes : définition

Définition II.1. On se donne G un ensemble et une application $G \times G$ dans G qu'on va noter $*$ (on parle de *loi*, d'opération) : $(x,y) \mapsto x*y$ vérifiant pour tous éléments x, y, z de G

- **loi interne:** $x*y \in G$
- **associativité:** $(x*y)*z = x*(y*z)$;
- **élément neutre:** il existe un élément e tel que $e*z = z*e = z$;
- **inverse:** il existe un élément $t \in G$ tel que $x*t = t*x = e$.

L'ensemble G muni de la *loi* $*$ est appelé un *groupe*.

Définition II.2. Un groupe G est dit *commutatif* si pour tous éléments x, y de G

$$x*y = y*x.$$

Si G a un nombre fini d'éléments, on représente la loi sous la forme d'un tableau.

Exercice 2. Prenons $G = \{pair, impair\}$. Remplissez les deux tableaux selon les règles d'addition et de multiplication. Sont-ils la table d'un groupe ? Si oui, quel est l'élément neutre ?

+	pair	impair
pair		
impair		

$\times$	pair	impair
pair		
impair		

Exercice 3. Prenons $G = \{1,-1\} \times \{1,-1\}$:

$$G = \{(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)\}.$$

On définit $(x,y) * (x',y') = (xx',yy')$. Compléter le tableau en appelant $x_1 = (1,1)$, $x_2 = (1,-1)$, $x_3 = (-1,1)$, $x_4 = (-1,-1)$.

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1				
x_2				
x_3				
x_4				

Est-il commutatif ?

II.3. Exemple : les matrices d'ordre 2 Une matrice carrée de taille n est un tableau à n lignes et n colonnes. Nous allons regarder le cas où $n = 2$. Une matrice carrée A de taille 2 s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

où a, b, c et d sont les coefficients.

On définit des opérations sur l'ensemble $M_2(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre 2 à coefficients réels :
Addition :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Démontrer que $M_2(\mathbb{R})$ muni de cette opération est un groupe commutatif.

Multiplication :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Effectuer le produit

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Lesquelles des propriétés de groupe sont vérifiées pour l'opération *multiplication* ? Que faut-il rajouter comme condition pour avoir une opération de groupe ?

Un exemple important pour la géométrie (et pour la physique) sont les groupes de symétrie ou groupes d'isométries.

II.4. Groupe de symétrie : un premier contact

Définition II.3. On appelle *isométrie* une application du plan (ou de l'espace) conservant les distances :

$$\|f(B)-f(A)\| = \|B-A\|.$$

pour tous points A et B.

On note $Is = Is(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble des isométries du plan.
Quelques exemples dans le plan :

- l'*identité* ;
- les *rotations* ;
- les *réflexions par rapport à une droite* ;
- les *symétries centrales par rapport à un point*.

Nous verrons qu'il y en a d'autres (par exemple, les *translations*, les *symétries glissées*) et nous les trouverons toutes. Celles qu'on vient d'énumérer ont la propriété de laisser fixe un point du plan.

Exercice 7 (Le rectangle)**.** Chercher les isométries du type précédent qui conservent un rectangle (quelconque, c'est-à-dire qui n'est pas un carré).

Suite. Soit G le centre de gravité du rectangle, c'est-à-dire l'intersection des diagonales. On trouve

(1) l'identité
(2) les réflexions par rapport à chacune des médiatrices des côtés D_1, D_2 ;

On peut composer ces transformations. En obtient-on d'autres ?

	id	s_G	s_{D_1}	s_{D_2}
id				
s_G				
s_{D_1}				
s_{D_2}				

Le groupe est-il commutatif ? Comment chacune des ces transformations permutent-elles les sommets A, B, C, D ?

	A	B	C	D
id				
s_G				
s_{D_1}				
s_{D_2}				

On a ainsi défini une application du groupe de symétrie du rectangle dans le groupe des permutations des quatre sommets A, B, C et D.

Exercice 8 (Le triangle équilatéral)**.** Chercher les isométries du type précédent qui conservent un triangle équilatéral.

Suite. Soit G le centre de gravité du triangle. Il doit être fixe (pourquoi ?). On trouve

(1) l'identité
(2) les réflexions par rapport à chacune des médiatrices Δ_{AB}, Δ_{BC}, Δ_{CA} ;
(3) les rotations d'angle $2\pi/3$, $4\pi/3$, et de centre G.

On peut composer ces transformations. En obtient-on d'autres ?

	id	$r_{2\pi/3}$	$r_{4\pi/3}$	$s_{\Delta_{AB}}$	$s_{\Delta_{BC}}$	$s_{\Delta_{CA}}$
id						
$r_{2\pi/3}$						
$r_{4\pi/3}$						
$s_{\Delta_{AB}}$						
$s_{\Delta_{BC}}$						
$s_{\Delta_{CA}}$						

L'ensemble $\{id, r_{2\pi/3}, r_{4\pi/3}, s_{\Delta_{AB}}, s_{\Delta_{BC}}, s_{\Delta_{CA}}\}$ est un groupe. On peut faire quelques remarques sur le tableau une fois rempli : que remarquez-vous sur chaque ligne ou sur chaque colonne ?

Comment chacune des ces transformations permutent-elles les sommets A, B, C ?

	A	B	C
id			
$r_{2\pi/3}$			
$r_{4\pi/3}$			
$s_{\Delta_{AB}}$			
$s_{\Delta_{BC}}$			
$s_{\Delta_{CA}}$			

Vérifier qu'on définit ainsi une application du groupe de symétrie du triangle dans le groupe des permutations des trois sommets A, B et C.

Exercice 9 (Autres figures)**.** Faire le cas d'un triangle isocèle, d'un losange, d'un carré, d'un hexagone régulier ...

II.5. Groupe de symétrie : définition

Définition II.4. Soient F un ensemble de points dans le plan. L'ensemble des *isométries* conservant F est un groupe et est appelé *groupe de symétrie* de F ou *groupe d'isométries*. On le note ici $Is(F)$. Si ce groupe est fini, on appelle *ordre* le nombre de ses éléments.

Exercice 10. Dessiner une figure ayant la symétrie du rectangle, du triangle équilatéral (et qui n'en soit pas un), c'est-à-dire telle que son groupe de symétrie soit celui du rectangle ou du triangle équilatéral.

Exercice 11. Trouver le groupe de symétrie des lettres de l'alphabet et écrire son ordre dans le tableau (on ne tiendra pas compte des grosseurs de trait légèrement différentes ...).

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z

III. *Rappels : Le plan complexe*

Donnons quelques rappels sur le plan complexe et les isométries dans le plan complexe.

- Un nombre complexe s'écrit $z = x+iy$ où x et y sont des réels : x est la *partie réelle* de z, y est la *partie imaginaire* de z.
- Le *conjugué* $\bar{z}$ de $z = x+iy$ est $x-iy$.
- Le *module* $|z|$ de z est $\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$.
- Tout nombre complexe de module 1 s'écrit $\cos\theta + i\sin\theta$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ unique modulo 2π : c'est l'*argument* de z (on peut par exemple prendre θ entre 0 et 2π). On pose $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
- Tout nombre complexe $x+iy$ non nul s'écrit de manière unique $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et θ l'argument de z. On représente un point du plan par son *affixe* : $(x,y) \mapsto z = x+iy$

III.1. Quelques similitudes Soient z_A, $\theta \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

- L'application $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z_A + e^{i\theta}(z-z_A)$ est une *rotation* de centre z_A (ou A) et d'angle θ :
$$z' - z_A = e^{i\theta}(z-z_A)$$
- L'application $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z+b$ est une *translation* :
$$z' = z+b$$
- L'application $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \lambda(z-z_A)+z_A$ est une *homothétie* de centre z_A (ou A) et de rapport λ :
$$z' - z_A = \lambda(z-z_A)$$

Représenter chacune de ces transformations.

III.2. Exercices

Exercice 12. Calculer le composé de deux transformations décrites précédemment. Donner leur nature. Trouver à partir de ces résultats des groupes (pour la loi de composition des transformations).

On dit qu'une transformation f conserve les angles si pour tous points A, B, C, les angles de droite $(\widehat{AB,AC})$ et $(\widehat{f(A)f(B),f(A)f(C)})$ sont égaux.

Exercice 13. Soit l'application $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto az+b$ avec a et b des complexes. A quelle condition cette transformation est-elle une isométrie, c'est-à-dire conserve-t-elle les distances ? Conserve-t-elle les angles ? Discuter suivant a et b et déterminer sa nature géométrique.

Exercice 14. Soit l'application $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto a\bar{z}+b$ avec a et b des complexes. A quelle condition cette transformation est-elle une isométrie, c'est-à-dire conserve-t-elle les distances ? Conserve-t-elle les angles ? Représenter le cas particulier $s : z \mapsto \bar{z}$. A quoi correspond la transformation $z \mapsto e^{i\theta}\bar{z}$?

Une similitude conserve les rapports de distance : il existe une constante k telle que
$$\|f(A)-f(B)\| = k\|A-B\|.$$

Exercice 15. En plaçant « bien » un triangle équilatéral dans le plan complexe (par exemple, son centre de gravité en 0 et un de ses sommets en 1), expliciter les similitudes complexes qui le laissent invariant.

III.3. Indication pour trouver la nature géométrique

Pour trouver la nature géométrique d'une application du plan complexe de la forme

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; z \mapsto az + b$$

où a et b sont des complexes et pour trouver ses éléments caractéristiques :

- Si $a = 1$, $f(z) = z + b$: il s'agit d'une translation de vecteur représenté par b.
- Si $a \neq 1$, l'équation $z = az + b$ en z a une solution $b/(1-a)$ et la transformation f a donc un point fixe A d'affixe $z_A = b/(1-a)$. On peut alors écrire

$$f(z) - z_A = a(z - z_A).$$

  - Si a est réel, f est une homothétie de rapport a et de centre A.
  - Si a est un nombre complexe de module 1 et d'argument θ modulo 2π, f est une rotation d'angle θ et de centre A.
  - Si a est un complexe de module r et d'argument θ modulo 2π, f est une similitude d'angle θ, de centre A et de rapport r. Dans ce cas, f est le composé d'une homothétie et d'une rotation.

CHAPITRE 2

Géométrie du plan

Donnons d'abord quelques notions de base sur le plan vectoriel en s'appuyant sur le programme de terminale.

I. *Le plan vectoriel*

Le plan vectoriel est $\mathbb{R}^2$. C'est l'ensemble des couples de nombres réels (x,y). On appelle ses éléments des vecteurs. Par exemple, le vecteur nul est $\overrightarrow{0} = (0,0)$. On note $\overrightarrow{i} = (1,0)$, $\overrightarrow{j} = (0,1)$. On peut additionner des vecteurs et multiplier un vecteur par un nombre réel.

I.1. Définitions et propriétés

Proposition I.1. *L'addition dans le plan vectoriel est une loi de groupe commutatif : pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et w du plan,*

(1) *(associativité)* $(u+v)+w = u+(v+w)$ *;*
(2) *(élément neutre)* $u+0 = u$ *;*
(3) *(opposé)* $u+(-u) = 0$ *;*
(4) *(commutativité)* $u+v = v+u$.

La multiplication d'un vecteur par un réel est compatible avec l'addition : pour tous vecteurs u et v du plan et tous réels a et b,

(1) $a\cdot(b\cdot u) = (a\cdot b)\cdot u$ *;*
(2) *(distributivité)* $(a+b)\cdot u = a\cdot u + b\cdot u$ *;*
(3) *(distributivité)* $a\cdot(u+v) = a\cdot u + a\cdot v$ *;*
(4) *(élément absorbant)* $a\cdot\vec{0} = 0\cdot u = \vec{0}$ *;*
(5) $1\cdot u = u$

I.2. Droites

Définition I.1. Une *droite vectorielle* est une partie D du plan formée des multiples λu, $\lambda \in \mathbb{R}$ d'un vecteur non nul u. On dit que u est une base de D. Tout autre vecteur non nul appartenant à D en est une base.

Si $v = (a,b)$, alors $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | bx - ay = 0\}$. On dit que $bx - ay = 0$ est une *équation* de la droite D. Si $a \neq 0$, on peut mettre cette équation sous la forme

$$y - \tfrac{b}{a}x = 0 \text{ ou encore } y = \tfrac{b}{a}x.$$

Le nombre $\frac{b}{a}$ est la *pente (coefficient directeur)* de la droite. Le vecteur nul appartient à toutes les droites vectorielles.

I.3. Indépendance et colinéarité

Définition I.2. Deux vecteurs u et v sont *colinéaires* s'il existe deux réels λ et μ tels que $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$ et tels que $\lambda u + \mu v = 0$.

Pour que deux vecteurs soient colinéaires, il faut et il suffit qu'ils appartiennent à la même droite.

Définition I.3. Deux vecteurs u et v sont *linéairement indépendants* s'ils ne sont pas colinéaires.

Proposition I.2. *Soient deux vecteurs* $v_1 = (a_1, b_1)$ *et* $v_2 = (a_2, b_2)$*. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) v_1 *et* v_2 *sont linéairement indépendants ;*
(2) $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ *;*
(3) *tout vecteur* v *s'écrit de manière unique* $v = x_1v_1 + x_2v_2$ *avec* x_1 *et* x_2 *dans* $\mathbb{R}$.

Trouver x_1 et x_2 revient à résoudre un système linéaire.

Ecrire la démonstration

I.4. Bases

Définition I.4. Une *base* de $\mathbb{R}^2$ est un couple (e, f) de vecteurs linéairement indépendants. Si v est un vecteur, les réels a et b tels que

$$v = ae + bf$$

sont appelés les *coordonnées/composantes* de v dans la base (e, f).

Par exemple, les composantes de $v = (x, y)$ dans la base (i, j) sont x et y.

Soient (p, q) et (r, s) les composantes de i et j dans la base (e, f). Alors, les composantes du vecteur $u = (x, y)$ dans la base (e, f) sont $(X, Y) = (px + ry, qx + sy)$, c'est-à-dire sous forme matricielle et en colonne :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} px + ry \\ qx + sy \end{pmatrix}$$

Ecrire la démonstration

Proposition I.3. *Soient* (e, f) *une base du plan vectoriel,* u *et* v *deux vecteurs de composantes respectives* (X_u, Y_u) *et* (X_v, Y_v) *dans la base* (e, f)*.*

(1) *Les vecteurs* u *et* v *sont colinéaires si et seulement si* $X_uY_v - X_vY_u = 0$.
(2) *L'ensemble des vecteurs dont les composantes* (X, Y) *dans la base* (e, f) *vérifient* $aX + bY = 0$ *est une droite vectorielle.*

Ecrire la démonstration

Exercice 16. Soit m un nombre réel. On considère les vecteurs $e = (1, m+1)$ et $f = (m, 6)$.

(1) A quelle condition sur m le couple (e, f) est-il une base du plan vectoriel ?
(2) Donner les coordonnées (X, Y) du vecteur u dans la base (e, f) en fonction des coordonnées (x, y) dans la base usuelle.

Vous trouverez d'autres exercices dans les feuilles d'exercices WIMS.

II. *Le plan affine*

Le plan affine est toujours $\mathbb{R}^2$ mais vu un peu différemment (on le note ici P). D'abord, on va appeler ses éléments des *points*. Un point du plan est donc encore un couple de réels. Le point $A = (x_A, y_A)$ a pour abscisse x_A et pour ordonnée y_B. On appelle *bipoint* un couple de points.

II.1. Translations

Définition II.1. Soit $v = (a, b)$ un vecteur. On appelle *translation de vecteur* v l'application de P dans P :

$$P = (x, y) \mapsto P + v = (a + x, b + y) \ .$$

On la note t_v.

Remarquons qu'on vient de *définir* la notation $P + v$ où P est un point et v un vecteur.

Proposition II.1.

(1) *t_v est une bijection de P dans P ;*
(2) *$t_v \circ t_w = t_{v+w}$;*
(3) *$t_v \circ t_{-v} = t_{\vec{0}} = id$.*

L'ensemble des translations du plan P muni de la composition des applications est un groupe commutatif.

Proposition II.2.

(1) *Pour tout bipoint AB, il existe un unique vecteur v tel que $t_v(A) = B$. On le note aussi $\vec{AB}$. On a donc la relation*

$$B = A + \vec{AB}.$$

(2) *Relation de Chasles Pour tous points A, B, C de P, on a la relation*

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

(3) *Pour tout point A du plan et tout vecteur u, il existe un unique point B tel que* $\vec{AB} = u$.

La troisième affirmation est la bijectivité de la translation t_v.

II.2. Repères du plan

Définition II.2. Un *repère (affine)* du plan est un triplet (A, e, f) formé d'un point du plan affine P et de deux vecteurs (e, f) formant une base du plan vectoriel. Les *coordonnées* de M dans le repère (A, e, f) sont les composantes du vecteur $\vec{AM}$ dans la base (e, f).

Ainsi, tout point M de P s'écrit de manière unique $A + Xe + Yf$ et (X, Y) sont les coordonnées de M dans le repère affine (A, e, f).

Exemple II.1. Soit $A = (2, 1)$, $e = (1, 2)$, $f = (1, 1)$. Ecrire les coordonnées du point $M(x, y)$ dans le repère (A, e, f).

Ecrire les relations vectorielles

II.3. Droites affines

Définition II.3. Une *droite affine D* est une partie du plan affine telle que pour tout $A \in D$, l'ensemble des vecteurs $\vec{AM}$ pour $M \in D$ soit une droite vectorielle.

Ce qu'on peut dire d'autres manières :

(1) $D = \{A + \lambda u, \lambda \in \mathbb{R}\}$;
(2) D est le translaté par le vecteur OA d'une droite vectorielle D_0 de base u ; la droite D_0 est appelée direction de D. La direction D_0 de D est aussi l'ensemble des vecteurs $\vec{PQ}$ pour P et Q des points de D. Un *vecteur directeur* de D est une base de la direction D_0 de D.

Définition II.4. Trois points A, B et C du plan affine P sont alignés s'ils appartiennent à une même droite, c'est-à-dire si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.

L'ensemble des points alignés avec deux points distincts du plan forme une droite. C'est la droite passant par ces deux points. Toute droite affine D est aussi l'ensemble des points $M = (x, y)$ vérifiant une équation $ax + by + c = 0$. Sa direction est d'équation $ax + by = 0$.

Remarque II.2. On a donc plusieurs manières de se donner une droite et de la représenter. Il est important de savoir passer d'une "représentation à l'autre" et de savoir utiliser la plus adéquate pour résoudre des problèmes. Ainsi, pour se donner une droite, on peut

(1) se donner un point A et un vecteur v non nul ;
(2) se donner deux points distincts A et B ;
(3) écrire l'ensemble des points de la droite comme les points M tel que AM soient colinéaires à v pour un point A et un vecteur v non nul :

$$\{M \in \mathbb{R}^2 \text{ tel qu'il existe } t \in \mathbb{R} \mid \vec{AM} = t\vec{v}\}$$

(4) écrire l'ensemble des points de la droite comme les points M barycentres de deux points A et B distincts :

$$\{M \in \mathbb{R}^2 \text{ tel qu'il existe } t \in \mathbb{R} \mid \vec{OM} = (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB}\}$$

(5) écrire l'ensemble des coordonnées des points de la droite :

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel qu'il existe } t \in \mathbb{R} \mid \begin{cases} x &= a + tu_1 \\ y &= b + tu_2 \end{cases}\}$$

(6) donner une relation entre les coordonnées (x,y) vérifiées par les coordonnées des points de la droite et uniquement par eux. Les vecteurs v et $\vec{AB}$ sont des vecteurs directeurs. Le coefficient directeur (pente) de la droite affine est la pente de sa direction. C'est donc b/a si $v = (a,b)$ avec v non nul et ∞ si $v = (a,0)$.

Exercice 17. Donner plusieurs manières de représenter la droite passant par les deux points $(1,2)$ et $(3,-1)$.

(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
(6)

II.4. Incidence

Définition II.5. Deux droites affines sont parallèles si elles ont même direction.

Proposition II.3.

(1) *Pour que deux droites D_1 et D_2 soient parallèles, il faut et il suffit qu'il existe une translation T telle que $T(D_1) = D_2$.*

(2) *Si D est une droite affine et P un point du plan, il existe une unique droite affine D' parallèle à D et passant par P (c'est-à-dire telle que $P \in D'$) : D' est l'image de la direction D_0 de D par la translation de vecteur $\vec{OP}$. Si A est un point de D, c'est aussi l'image de D par la translation de vecteur $\vec{AP}$.*

Définition II.6. Deux droites affines sont *sécantes* si elles se coupent en un unique point.

Proposition II.4. *Deux droites parallèles D et D' sont soit disjointes ($D \cap D' = \emptyset$), soit confondues ($D = D'$).*

Proposition II.5. *Deux droites sont soit parallèles, soit sécantes ($D \cap D' = \{A\}$ avec A un point du plan).*

Corollaire II.6. *Deux droites D d'équation $ax + by + c = 0$ et D' d'équation $a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles si $ab' - a'b = 0$. Elles sont sécantes si et seulement si $ab' - a'b \neq 0$.*

Exercice 18.

(1) Parmi les points suivants, lesquels sont alignés ? $A = (1,2)$, $B = (29/5, 31/7)$, $C = (2, 5/2)$, $D = (-1,-2)$, $E = (-\sqrt{12}+1, -\sqrt{3}+2)$
(2) Déterminer l'intersection de (AB) et de (CD).

Exercice 19.

(1) Parmi les droites suivantes, déterminer lesquelles sont parallèles, lesquelles sont concourantes et leurs points d'intersection :
$$D_1 : 3x - 2y + 1 = 0,\ D_2 : y = 4x - 7,\ D_3 : \begin{cases} x &= 4t+4 \\ y &= 6t+3 \end{cases}, t \in \mathbb{R},\ D_4 : 5x + y = 20,$$
$D_5 : 2x + 7 - 41 = 0$
(2) Donner l'équation générale des droites passant par $A = (3,5)$.
(3) Déterminer l'équation de la parallèle à D_2 passant par $B = (-1,0)$.

Exercice 20. Soit λ un réel non nul.

(1) Donner l'équation de la droite D_λ passant par les points $A_\lambda = (1/\lambda, 0)$ et $B_\lambda = (0, \lambda)$.
(2) Soit $M = (x,y)$ un point du plan. Donner tous les λ tels que M appartient à D_λ.
(3) Décrire $\cup_{\lambda \in \mathbb{R}^*} D_\lambda$.

Exercice 21. On considère les points $A = (0,1)$, $B = (2,2)$, $C = (1,3)$.

(1) Donner les coordonnées des points $D = (3,-1)$ et $E = (1,3)$ dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$.
(2) Donner une équation dans le repère usuel de la droite Δ d'équation $X - 2Y + 5 = 0$ dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$.

Vous trouverez d'autres exercices dans les feuilles d'exercices WIMS.

II.5. Barycentres de points

Définition II.7. Soient n un entier, A_1, ..., A_n n points et a_1, ... , a_n des réels tels que $a_1 + \ldots + a_n \neq 0$. Le *barycentre des points pondérés* (A_1, a_1), ..., (A_n, a_n) est l'unique point G du plan tel que
$$a_1 \vec{GA_1} + \ldots + a_n \vec{GA_n} = 0.$$

Si A est un point du plan, il vérifie :
$$G = A + \frac{1}{a_1 + \ldots + a_n}(a_1 \vec{AA_1} + \ldots + a_n \vec{AA_n})$$
Les coordonnées du barycentre G s'expriment (avec des notations « évidentes »)
$$\begin{cases} x_G &= \frac{a_1x_1+\ldots+a_nx_n}{a_1+\ldots+a_n} \\ y_G &= \frac{a_1y_1+\ldots+a_ny_n}{a_1+\ldots+a_n} \end{cases}$$

Le milieu du segment $[AB]$ est l'unique point I tel que $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$. Les coordonnées de A, B et I vérifient

$$x_I = \frac{1}{2}(x_A + x_B)\ , \quad y_I = \frac{1}{2}(y_A + y_B).$$

Proposition II.7. *Si A et B sont deux points distincts, la droite (AB) est l'ensemble des barycentres de A et B.*

Exercice 22. Décrire l'ensemble des points du segment $[AB]$.

Proposition II.8 (Associativité du barycentre)**.** *Si $a_1 + a_2 \neq 0$ et si A' est le barycentre de (A_1, a_1), (A_2, a_2), le barycentre de (A_1, a_1), (A_2, a_2), (A_3, a_3), ..., (A_n, a_n) est égal au barycentre de $(A'_1, a_1 + a_2)$, (A_3, a_3), ..., (A_n, a_n) s'ils existent.*

Quand les poids a_1, ..., a_n sont tous égaux, on appelle le barycentre l'*isobarycentre* ou *centre de gravité*.

II.6. Polygones

Définition II.8. Un *triangle* est un triplet $T = (A, B, C)$ de points. Si les points A, B, C sont alignés ou confondus, on dit que T est dégénéré.

Supposons T non dégénéré. Les points A, B, C sont les *sommets*, les droites (AB), (BC), (CD) sont les *côtés*. Le côté (BC) est *opposé* à A. Soient P, Q et R les milieux respectifs des côtés opposés à A, B et C. Les droites (AP), (BQ), (CR) sont les *médianes* du triangle. Elle passent par le *centre de gravité G* de T.

Définition II.9. Un *parallélogramme* est un quadruplet (A, B, C, D) de points du plan tel que $\vec{AB} = \vec{DC}$, ou ce qui revient au même $\vec{AC} = \vec{BD}$.

Pour qu'un quadruplet (quadrilatère) soit un parallèlogramme, il faut et il suffit que les segments $[AD]$ et $[BC]$ aient même milieu.

Définition II.10. L'*enveloppe convexe* d'un ensemble de points est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs (une fois normalisé pour que la somme des poids soit positive). Le segment $[AB]$ est l'enveloppe convexe de A et B.

Définition II.11. Une partie C du plan est *convexe* si pour tous points A et B de C, le segment $[AB]$ est contenu dans C.

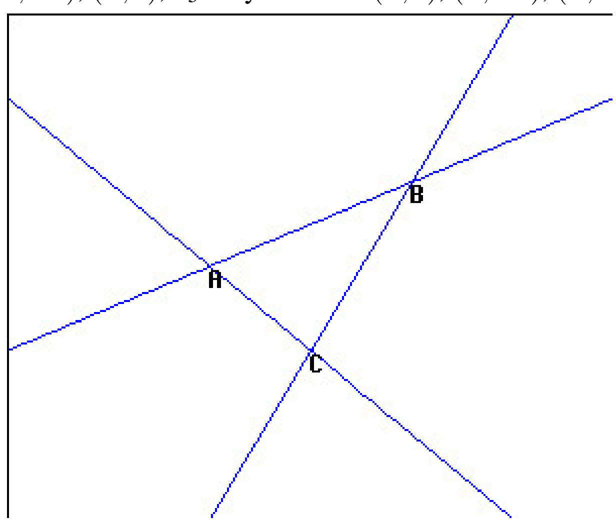
Proposition II.9. *L'enveloppe convexe d'un ensemble de points est le plus petit convexe contenant ses points.*

Dessiner un ensemble de 5 points, son enveloppe convexe ...

II.7. Exercices

Exercice 23. Tracer les trois droites d'équation $2x+y=1$, $-2x+y=1$, $y=-3$. Caractériser chacune des régions déterminées par ces droites à l'aide de leurs équations.

Exercice 24. Dans quelle région du plan se trouvent les points suivants : P_1 barycentre de $(A,3)$, $(B,2)$, $(C,1)$, P_2 barycentre de $(A,-3)$, $(B,1)$, $(C,1)$, P_3 barycentre de $(A,-3)$, $(B,-1)$, $(C,1)$, P_4 barycentre de $(A,1)$, $(B,-1)$, $(C,1)$, P_5 barycentre de $(A,3)$, $(B,-1)$, $(C,-1)$.



Donner de la même manière un point des autres régions. Placer chacun des points exactement sur la figure.

Exercice 25. Soient A, B et C trois points du plan et a, b, c trois réels non nuls tels que les barycentres suivants existent :

$$G:(A,a),(B,b),(C,c),$$
$$G_1:(A,-a),(B,b),(C,c),$$
$$G_2:(A,a),(B,-b),(C,c),$$
$$G_3:(A,a),(B,b),(C,-c).$$

(1) Montrer que (AG_1), (BG_2), (CG_3) sont concourantes en G.
(2) Montrer que (G_2G_3), (G_3G_1) et (G_1G_2) passent respectivement par A, B et C.

Solution. (1) *Montrons que G est sur la droite (AG_1). Par associativité du barycentre, G est le barycentre de $(A,2a)$, $(A,-a)$, (B,b), (C,c) et donc de $(A,2a)$, $(G_1,-a+b+c)$. Donc G est sur la droite $(AG_1$. De même pour les autres.*
(2) *Soit T le barycentre de $(B,-b)$ et (C,c). Alors, G_2 est le barycentre de (A,a) et de $(T,-b+c)$, G_3 est le barycentre de (A,a) et de $(T,b-c)$. Donc A, G_2 et G_3 sont alignés.*

Exercice 26. Tracer un triangle non dégénéré et les droites prolongeant les côtés du triangle. Caractériser chacune des sept régions obtenus en termes de barycentres des trois sommets du triangle. (On peut commencer par les régions déterminées par une droite.)

Vous trouverez d'autres exercices dans les feuilles WIMS.

III. *Le plan affine avancé*

III.1. Théorème de Thalès

Théorème III.1 (Thalès)**.** *Soient A, B, C trois points alignés et B', C' deux points alignés avec A tels que $\vec{AB}$ et $\vec{AB'}$ ne soient pas colinéaires. Alors :*

$$(\forall\lambda \in \mathbb{R})(\vec{AC} = \lambda\vec{AB} \text{ et } \vec{\mathrm{AC}'} = \lambda\vec{\mathrm{AB}'} \Leftrightarrow \vec{\mathrm{CC}'} = \lambda\vec{\mathrm{BB}'})$$

Proposition III.2 (Conséquence)**.** *Soient A, B et C trois points distincts du plan non alignés. Soient C' et B' les milieux respectifs de $[AB]$ et de $[AC]$. Alors, les droites (BC) et $(B'C')$ sont parallèles.*

Il y a de nombreuses autres formulations du théorème de Thalès, par exemple :

Proposition III.3. *Soient A, B, C trois points alignés et B', C' deux points alignés avec A tels que A, B, B' ne soient pas alignés. Alors, si C est le barycentre de (A,a) et (B,b), C' est le barycentre de (A',a) et (B',b) si et seulement si les droites BB' et CC' sont parallèles.*

III.2. Théorème de Ceva

Théorème III.4 (Ceva)**.** *Soit un triangle (ABC) et A', B' et C' des points situés respectivement sur les côtés opposés à A, B et C. Les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes si et seulement si*

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = 1.$$

Exemple III.1. Soient A et B deux points. Si C est barycentre de (A,a) et de (B,b), $\frac{AC}{CB}$ est égal à b/a. Cela fait un pont entre les barycentres et le théorème de Ceva.

Théorème III.5 (Médianes)**.**

- *Les médianes d'un triangle sont concourantes.*
- *Les médianes d'un triangle partagent celui-ci en six petits triangles d'aires égales.*
- *Les hauteurs d'un triangle sont concourantes.*

III.3. Théorème de Ménélaüs

Théorème III.6 (Ménélaüs)**.** *Soit un triangle (ABC) et A', B' et C' des points situés respectivement sur les droites (BC), (CA) et (AB). Les points A', B' et C' sont alignés si et seulement si*

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = -1.$$

III.4. Birapport Rappelons que si A, B sont deux points distincts, le rapport $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ détermine la position d'un point C de la droite (AB) par rapport à A et B.

Définition III.1. Le *birapport* de quatre points alignés A, B, C, D est le nombre $[[A,B,C,D]]$ égal au rapport de $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ et de $\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$:

$$\begin{aligned}[][A,B,C,D]] &= \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \Big/ \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \\ &= \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \times \frac{\overline{DB}}{\overline{DA}}\end{aligned}$$

Théorème III.7. *Soit r le birapport des quatre points alignés A, B, C, D et O un point distinct et non aligné avec les quatre points. Alors*

$$|r| = \frac{S(OCA)}{S(OCB)} \Big/ \frac{S(ODA)}{S(ODB)}$$

$$r = \frac{\sin \widehat{COA}}{\sin \widehat{COB}} \Big/ \frac{\sin \widehat{DOA}}{\sin \widehat{DOB}}$$

Corollaire III.8. *Le nombre*

$$[[A,B,C,D]]$$

ne dépend que des droites OA, OB, OC et OD et non de la sécante :

$$[[A,B,C,D]] = [[A',B',C',D']].$$

On le note aussi

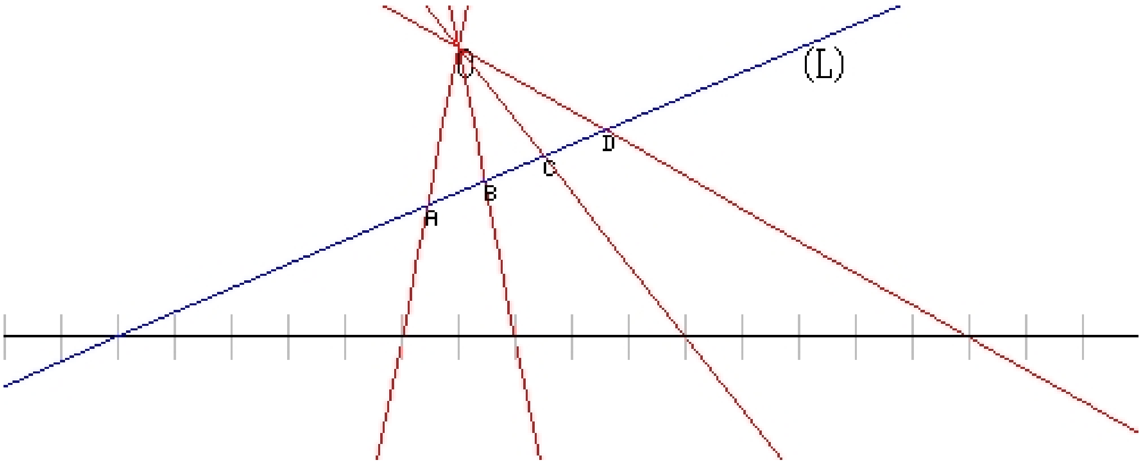
$$[[OA,OB,OC,OD]].$$

C'est le birapport des quatre droites.

Soit O' un autre point, on a

$$[[OA, OB, OC, OD]] = [[O'A, O'B, O'C, O'D]].$$

Exercice 27. Calculer le birapport des quatre points A, B, C, D de la figure.



Placer sur la droite L un point D' tel que le birapport de A, B, C, D' soit -1 (on dit que D' est le conjugué harmonique de C par rapport à A et B).

III.5. Théorème de Pappus

Théorème III.9 (Pappus)**.** *Soient A, B, C trois points alignés situés sur une droite D, Soient A', B', C' trois autres points alignés situés sur une autre droite. Les trois points U, V et W définis respectivement comme l'intersection de (BC') et de (CB'), l'intersection de (CA') et de (AC') et l'intersection de (AB') et de (BA') sont alignés.*

III.6. Théorème de Desargues

Théorème III.10 (Desargues)**.** *Soient (AB), $(A'B')$, $(A''B'')$ trois droites concourantes. Si (AA') et (BB') sont sécantes en C'', si $(A'A'')$ et $(B'B'')$ sont sécantes en C, $(A''A)$ et $(B''B)$ sont sécantes en C', alors C, C' et C'' sont alignés.*

Une autre formulation est :

Théorème III.11. *Si les droites joignant les sommets homologues de deux triangles sont concourantes, les points d'intersection de leurs côtés homologus sont alignés et réciproquement.*

Le théorème de Desargues est en fait un théorème dans l'espace que l'on peut projeter sur un plan.

Exercice 28. Soit (ABC) un triangle non dégénéré et D une droite sécante aux côtés du triangle respectivement en C', A' et B'. Montrer que les milieux I, J, et K de $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$ sont alignés.

III - Géométrie du plan (suite)

Et le plan est plus riche si on introduit une *structure euclidienne*, c'est-à-dire une distance, une norme, un produit scalaire ... (d'ailleurs, dans le plan complexe, cela existe aussi).

IV. *Le plan euclidien*

Le plan vectoriel euclidien est le plan vectoriel ou affine avec un produit scalaire :

Définition IV.1.

(1) Le *produit scalaire* de deux vecteurs $u = (x_u, y_u)$ et $v = (x_v, y_v)$ est le nombre réel $\langle u, v\rangle = x_u x_v + y_u y_v$.
(2) Deux vecteurs sont *orthogonaux* ou *normaux* si leur produit scalaire est nul.
(3) Si u est un vecteur, le réel $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{x_u^2 + y_u^2}$ s'appelle la *norme* ou la *longueur* de u.

IV.1. Propriétés du produit scalaire

Proposition IV.1. *Soient u, v et w trois vecteurs et λ et μ des réels. Le produit scalaire vérifie les propriétés suivantes :*

symétrie: $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ *;*
bilinéarité: $\langle \lambda u + \mu v, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle + \mu\langle v, w\rangle$ *;*
vecteur nul: $\langle u, 0\rangle = 0$ *;*
positivité: $\langle u, v\rangle \geq 0$ *;*
définie: $\langle u, v\rangle = 0$ *si et seulement si* $u = 0$.

Théorème IV.2 (Théorème de Pythagore)**.** *Si u et v sont deux vecteurs orthogonaux, on a*

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Théorème IV.3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Si u et v sont deux vecteurs, on a*

$$\langle u, v\rangle \leq \|u\|.\|v\|$$

Il y a égalité si et seulement si u et v sont colinéaires.

Montrer que si $u = (a, b)$ *et si* $v = (c, d)$*, on a*

$$|u\|^2 + \|v\|^2 = \langle u, v\rangle^2 + (ad - bc)^2.$$

Proposition IV.4. *Soient* $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ *deux vecteurs orthogonaux non nuls. Alors* $(\vec{v}, \vec{w})$ *forment une base de* $\mathbb{R}^2$.

IV.2. Bases orthogonales

Définition IV.2. Une *base orthogonale* de $\mathbb{R}^2$ est une base formée de deux vecteurs orthogonaux. Elle est dite *orthonormée* si de plus ceux-ci sont unitaires (c'est-à-dire de norme 1).

La base $(\vec{i},\vec{j})$ est orthonormée.

Proposition IV.5. *Si* (e_1,e_2) *est une base orthonormée et si* $v = Xe_1 + Ye_2$*,* $w = X'e_1 + Y'e_2$*, alors*

$$\langle v,w\rangle = XX' + YY'$$

IV.3. Version affine : la distance

Définition IV.3. Si A et B sont deux points du plan affine P, on appelle *distance (euclidienne)* de A à B le nombre $\|\overrightarrow{AB}\|$. On la note $d(A,B)$.

Définition IV.4. Un repère affine orthonormé $(A,\vec{e},\vec{f})$ est un repère affine tel que $(\vec{e},\vec{f})$ est une base orthonormée.

Exercice 29. Soient $A = (2,1)$, $B = (1,1)$, $C = (-2,0)$. Trouver un repère affine orthonormé $(A,\vec{e},\vec{f})$ tel que que $\vec{e}$ soit un vecteur directeur de la droite (AB) et tel que la deuxième coordonnée du point C dans ce repère soit positive ou nulle.

Proposition IV.6. *Soit* $v = (a,b)$ *un vecteur. L'ensemble des vecteurs orthogonaux à* v *est une droite vectorielle d'équation* $ax+by = 0$*. On l'appelle la* droite (vectorielle) orthogonale *à* v*.*

Définition IV.5.

(1) Deux droites vectorielles D et D' sont *orthogonales* (ou *perpendiculaires*) si un vecteur de base de D est orthogonal à un vecteur de base de D'.
(2) Deux droites affines D et D' sont *orthogonales* (ou *perpendiculaires*) si leurs directions sont orthogonales.

Si D est d'équation $ax+by=0$, la droite vectorielle perpendiculaire à D est d'équation $bx-ay=0$.

Si D et D' sont perpendiculaires et admettent respectivement comme équation $ax+by=0$ et $ax'+by'=0$, alors $aa'+bb'=0$.

Si D a comme vecteur directeur (a,b), la droite vectorielle perpendiculaire à D a comme vecteur directeur $(-b,a)$.

Proposition IV.7. *Deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles. Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à une est perpendiculaire à l'autre.*

IV.4. Distance d'un point à une droite

Proposition IV.8. *Soient D une droite affine et M un point du plan. Il existe une unique droite Δ perpendiculaire à D et passant par M. Soient A un point de D et v un vecteur de base de la direction de D. Le point d'intersection H de D et de Δ, appelé* projeté orthogonal *de M sur D vérifie :*

$$H = A + \frac{\langle \overrightarrow{AM}, v\rangle}{\|v\|^2} v$$

Exercice 30. La distance de M à un point Q de D est minimale pour le projeté orthogonal H de M sur D : pour tout point Q de D, on a

$$d(M,Q) \geq d(M,H).$$

Proposition IV.9. *La distance d'un point $A=(x_A,y_A)$ à une droite D d'équation $ax+by+c=0$ est*

$$d(A,D) = \frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

On définit ainsi une application de P dans P qui à M associe son projeté orthogonal sur D. On l'appelle *projection orthogonale* sur D.

IV.5. Triangles

Définition IV.6. Soit (ABC) un triangle non dégénéré. La *hauteur* issue du sommet A est la perpendiculaire au côté opposé BC passant par A. Le pied de cette hauteur est le projeté de A sur le côté BC.

Théorème IV.10 (Pythagore)**.** *Soit (ABC) un triangle rectangle en A, alors*

$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

De plus, si (ABC) est un triangle vérifiant l'égalité précédentes, il est rectangle en A.

Définition IV.7. La *médiatrice* de deux points distincts A et B est l'ensemble des points équidistants de A et B. C'est la droite perpendiculaire à (AB) passant par le milieu du segment $[AB]$.

Proposition IV.11. *Les médiatrices d'un triangle non dégénéré sont concourantes.*

Exercice 31. Comment calculer la distance de deux droites parallèles ? Utiliser plusieurs représentations des droites (équation cartésienne, équations paramétriques).

Exercice 32. Soit (ABC) un triangle équilatéral de hauteur h. Soit M un point à l'intérieur du triangle.

(1) Montrer que la somme des distances de M aux côtés du triangle est égale à h.
(2) Soient c, a, b les distances de M à chacun des côtés (AB), (BC) et (CA) respectivement. Montrer que M est le barycentre de (A,a), (B,b), (C,c)

On appelle les coordonnées (a,b,c) de M les coordonnées trilinéaires. Elles vérifient $a+b+c=h$. Tracer tous les points à coordonnées trilinéaires entières d'un triangle de hauteur 5. Combien y en a-t-il ?

IV.6. Cercles

Définition IV.8. Le cercle de centre A et de rayon r est l'ensemble des points dont la distance à A est r.

Définition IV.9. Le cercle circonscrit à un triangle non dégénéré est le cercle passant par les sommets du triangle.

Proposition IV.12. *Les médiatrices d'un triangle sont concourantes au centre du cercle circonscrit d'un triangle.*

Proposition IV.13. *Une droite et un cercle sont soit* sécants *(si leur intersection est formée de deux points distincts, soit* tangents *(un seul point d'intersection) soit* disjoints.

Proposition IV.14. *Si $M = (x_M, y_M)$ est un point du cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon r, il existe une unique tangente à $\mathcal{C}$ passant par M ; elle a pour équation*

$$(x_M - x_A)(x - x_M) + (y_M - y_A)(y - y_M) = 0$$

C'est la perpendiculaire au rayon du cercle passant par M.

Théorème IV.15 (droite d'Euler)**.** *Le* centre de gravité*, l'*orthocentre *et le* centre du cercle circonscrit *d'un triangle non dégénéré sont alignés.*

Faites un dessin !

IV.7. Angles On suppose connues la définition et propriété de base des fonctions trigonométriques. Par exemple,

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Soient u et w deux vecteurs non nuls. On définit l'angle (orienté) $\widehat{(v,w)}$ des vecteurs v et w comme le nombre réel θ modulo 2π tel que

$$\langle v,w\rangle = \|v\|\|w\|\cos\theta.$$

Un vecteur unitaire s'écrit $v = (\cos\theta, \sin\theta)$ où θ est un nombre réel unique modulo 2π, c'est-à-dire unique à l'addition près de $2n\pi$ avec n un entier relatif. On dit que θ est un *argument* de v.

Théorème IV.16 (Al-Kachi)**.** *Si (ABC) est un triangle non dégénéré,*

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos(\widehat{\vec{AB},\vec{AC}}).$$

Proposition IV.17. *Soient A et B deux points distincts et θ un angle non nul.*

(1) *L'ensemble des points M du plan tels que l'angle $\widehat{\vec{MA},\vec{MB}}$ soit égal à $\pm\theta$ est un cercle passant par A et B privé de A et B.*
(2) *Soient un cercle C de centre C et A, B et M trois points du cercle. Alors,*

$$(\widehat{\vec{CA},\vec{CB}}) = 2(\widehat{\vec{MA},\vec{MB}})$$

CHAPITRE 3

Isométries du plan

Et maintenant passons aux isométries du plan : une isométrie conserve les distances. Nous allons toutes les déterminer.

Définition .10. Une *isométrie* est une application de P dans P conservant les distances,

$$d(f(A),f(B)) = d(A,B)$$

pour tous points A et B : autrement dit :

$$\|\overrightarrow{f(A)f(B)}\| = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

I. *Des exemples*

Exercice 33. Avant même de commencer, essayez de WIMS : deviner de quelle isométrie il s'agit.

I.1. Les translations On les a déjà vu II.1. La translation de vecteur $\vec{v}$ associe à tout point M du plan le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$. La composition des deux translations de vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est la translation de vecteur $\vec{u}+\vec{v}$. Une translation transforme une droite en une droite parallèle et conserve les angles.

En particulier,

$$(\widehat{\overrightarrow{B_1B_2},\overrightarrow{A_1A_2}}) = (\overrightarrow{B_1B_2},\widehat{\overrightarrow{t(A_1)t(A_2)}}).$$

I.2. Les rotations

Soient A un point du plan P et θ un réel.

Définition I.1. On appelle *rotation* de centre A et d'angle θ l'application qui à un point M associe le point M' tel que $d(A,M') = d(A,M)$ et tel que l'angle orienté $\widehat{MAM'} = (\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}})$ est égal à θ modulo 2π ; l'image de A est A lui-même.

Exercice 34. On se donne deux points A et A' et deux demi-droites D et D' d'origine respective A et A' de ces points. Construire le centre de la rotation qui envoie D sur D'. On pourra se donner deux points B et B' sur chacune des deux demi-droites D et D' tels que $AB = A'B'$. Quelle est la condition sur les demi-droites pour que cette rotation existe ?

Soir $r = r_{A,\theta}$ une rotation de centre A et d'angle θ.

- Le point A est fixe et c'est le seul point fixe par r si l'angle de la rotation est non nul.

  DÉMONSTRATION. Par définition, $d(A, r(A)) = d(A,A) = 0$ donc $r(A) = A$. D'autre part, si B est un autre point fixe,
  $$\widehat{BAB} \equiv \theta \equiv 0 \bmod 2\pi \ .$$
  Donc l'angle de la rotation est nul. $\square$

- r est une isométrie et $(\widehat{\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{r(M_1)r(M_2)}}) \equiv \theta$.

  DÉMONSTRATION. On desine et on regarde les triangles AM_1M_2 et $Ar(M_1)r(M_2)$.

  Les côtés AM_1 et $Ar(M_1)$ d'une part et AM_2 et $Ar(M_2)$ d'autre part sont égaux par définition de r. On a alors l'égalité d'angles
  $$\begin{aligned}\widehat{M_1AM_2} &= \widehat{M_1Ar(M_1)} + \widehat{r(M_1)Ar(M_2)} + \widehat{r(M_2)AM_2}\\ &\equiv \theta + \widehat{r(M_1)Ar(M_2)} - \theta\end{aligned}$$
  Donc
  $$\widehat{M_1AM_2} = \widehat{r(M_1)Ar(M_2)}$$
  Les deux triangles AM_1M_2 et $AM_1'M_2'$ ont deux côtés égaux et un angle égal, ils sont donc égaux. Donc les troisièmes côtés sont égaux :
  $$d(r(M_1), r(M_2)) = d(M_1, M_2)$$
  Ce qui prouve que r est une isométrie. Les deux autres angles sont aussi égaux :
  $$(\widehat{\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{r(M_1)r(M_2)}})$$
  $$= (\widehat{\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{Ar(M_1)}}) + (\widehat{\overrightarrow{Ar(M_1)}, \overrightarrow{AM_2}}) + (\widehat{\overrightarrow{AM_2}, \overrightarrow{r(M_1)r(M_2)}})$$

$$\begin{aligned} &= -\widehat{M_1Ar(M_1)} + (\widehat{\overrightarrow{Ar(M_2)},\overrightarrow{AM_2}}) + \widehat{M_2Ar(M_2)} \\ &= (\widehat{\overrightarrow{Ar(M_2)},\overrightarrow{AM_2}}) \equiv \theta \end{aligned}$$

□

- la rotation respecte les angles et l'orientation

  DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned} (\widehat{\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_3M_4}}) &= (\widehat{\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{r(M_1)r(M_2)}}) \\ &+ (\widehat{\overrightarrow{r(M_1)r(M_2)},\overrightarrow{r(M_3)r(M_4)}}) + (\widehat{\overrightarrow{r(M_3)r(M_4)},\overrightarrow{M_3M_4}}) \\ &= (\widehat{\overrightarrow{r(M_1)r(M_2)},\overrightarrow{r(M_3)r(M_4)}}) \end{aligned}$$

□

Proposition I.1. *L'ensemble des rotations de centre A muni de la loi de composition des applications est un groupe. Le composé d'une rotation et d'une translation est une rotation.*

DÉMONSTRATION.

Le composé de deux rotations de centre A: Le composé $r = r_1 \circ r_2$ de deux rotations r_1 et r_2 de centre A et d'angles respectifs θ_1 et θ_2 est une rotation de centre A et d'angle $\theta_1 + \theta_2$: en effet

$$d(A, r_1(M')) = d(A, M'),\ d(A, r_2(M)) = d(A, M);$$

en prenant $M' = r_2(M)$, on obtient

$$d(A, r_1 \circ r_2(M)) = d(A, r_1(r_2(M))) = d(A, r_1(M')) = d(A, M') = d(A, M)$$

Pour les angles,

$$\begin{aligned} \widehat{MAr_1 \circ r_2(M)} &= \widehat{MAr_2(M)} + \widehat{r_2(M)Ar_1 \circ r_2(M)} \\ &\equiv \theta_2 + \theta_1 \mod 2\pi \ . \end{aligned}$$

L'inverse d'une rotation: L'inverse de la rotation de centre A et d'angle θ est la rotation de centre A et d'angle $-\theta \mod 2\pi$.

Le composé d'une rotation et d'une translation: Etudions le composé d'une translation t_v et d'une rotation $r = r_{A,\theta}$. Construisons un point fixe géométriquement. Notons-le B.

A faire

Le composé de deux isométries est une isométrie, donc on a bien la relation

$$d(B, f(M)) = d(f(B), f(M)) = d(B, M)$$

On a d'autre part

$$(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{Bf(M)}}) = (\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{f(B)f(M)}}) = (\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{r(B)r((M)}})) \equiv \theta$$

□

Proposition I.2. *Le composé de deux rotations est soit une rotation, soit une translation.*

Ici les rotations n'ont pas forcément le même centre.

DÉMONSTRATION. Cherchons un point fixe.

A faire

On le note B. La relation sur les angles se démontre ensuite toujours de la même manière

$$\begin{aligned}
&(\widehat{\overrightarrow{f(B)f(M)}, \overrightarrow{BM}}) \\
&\qquad = (\widehat{\overrightarrow{r_1(r_2(B))r_1(r_2(M))}, \overrightarrow{r_2(B)r_2(M)}}) + (\widehat{\overrightarrow{r_2(B)r_2(M)}, \overrightarrow{BM}}) \\
&\qquad \equiv \theta_1 + \theta_2
\end{aligned}$$

□

Exercice 35. Vérifier que

$$r_{A,\theta} = t_{\vec{v}} \circ r_{B,\theta}$$

avec

$$\vec{v} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{Or_{B,\theta}(A)} = \overrightarrow{r_{B,\theta}(A)A}$$

Quel est le centre de rotation de $t_{\vec{v}} \circ r_{B,\theta}$, de $r_{B,\theta} \circ t_{\vec{v}}$? Comment le construire géométriquement ?

Remarque I.1. Dans le plan complexe, la rotation est donnée par

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z' = z_A + e^{i\theta}(z - z_A).$$

Prenons d'abord pour A l'origine O. Si $z' = x' + iy'$ et $z = x + iy$, on obtient

$$\begin{cases} x' &= \cos\theta\, x &+ \sin\theta\, y \\ y' &= -\sin\theta\, x &+ \cos\theta\, y \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

On vérifie ainsi que la rotation de centre O et d'angle θ est une application linéaire.

Pour A quelconque, on a les formules

$$\begin{pmatrix} x' - x_A \\ y' - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_B \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est égal à $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

I.3. Les réflexions Soit D une droite affine du plan P.

Définition I.2. Le *symétrique orthogonal* d'un point P par rapport à D est le point Q tel que la droite (PQ) soit perpendiculaire à D et tel que l'intersection de (PQ) et de D soit le milieu du segment $[PQ]$. L'application $s_D : P \to P$, $P \mapsto Q$ est appelée *réflexion orthogonale* ou *réflexion axiale* ou *symétrie orthogonale* d'axe D.

Proposition I.3. *Les points de la droite D sont invariants par la réflexion s_D. Les droites Δ perpendiculaires à D sont globalement invariantes par s_D : $s_D(\Delta) = \Delta$. Une réflexion s transforme les angles en leur opposé :*

$$\widehat{s(A)s(B)s(C)} = -\widehat{ABC}.$$

Exercice 36. Construire l'axe de la réflexion donnée par les images d'un certain nombre de points (à propos, combien de points sont-ils nécessaires pour déterminer une réflexion) ?

Remarque I.2. Prenons comme repère affine orthonormé $(A,\vec{u},\vec{v})$ avec A un point de D, $\vec{u}$ un vecteur unitaire sur D et $\vec{v}$ un vecteur unitaire normal à $\vec{u}$. La réflexion s_D est donnée dans ce repère par

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

Soit θ l'angle que fait le vecteur $\vec{u}$ avec le vecteur $\vec{i}$. On a donc $\vec{u} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$, et on peut prendre $\vec{v} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$. Alors la matrice de s_D dans le repère $(A,\vec{i},\vec{j})$ est

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

Cela peut se voir géométriquement .

faire un dessin.

Si $\vec{a}$ est l'image de $\vec{i}$ par la réflexion s_D, comme l'angle de $\vec{u}$ porté par D avec $\vec{i}$ est θ, l'angle que fait $\vec{i}$ avec son image est 2θ.

Le déterminant de $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$ est $-(\cos^2 2\theta + \cos^2 2\theta) = -1$.

Exercice 37. La réflexion par rapport à une droite passant par A et de vecteur normal $\vec{v}$ est donnée par

$$s_D(M) = M - 2\frac{\langle \overrightarrow{AM}, \vec{v}\rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle}\vec{v}.$$

I.4. Les symétries glissées

Que donne le composé d'une réflexion et d'une translation ?

Définition I.3. Soit D une droite et $\vec{v}$ un vecteur *parallèle* à D. On appelle symétrie glissée d'axe de glissage D et de vecteur $\vec{v}$ le composé de la réflexion s_D par la translation de vecteur $\vec{v}$.

On a

$$s_D \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ s_D$$

Proposition I.4. *Soit $\vec{v}$ un vecteur quelconque. Soit s_D la réflexion par rapport à la droite D et $t_{\vec{v}}$ la translation de vecteur $\vec{v}$.*

- *Si $\vec{v}$ est perpendiculaire à D, $s_D \circ t_{\vec{v}}$ est une réflexion par rapport à la droite translatée de D par le vecteur $-\vec{v}/2$*
- *Si $\vec{v}$ n'est pas perpendiculaire à D, posons $\vec{v} = \vec{w} + \vec{v}_1$ avec $\vec{w}$ la projection de $\vec{v}$ sur D et $\vec{v}_1$ perpendiculaire à D et soit D_1 la droite translatée de D par le vecteur $-\vec{v}/2$. Alors, $s_D \circ t_{\vec{v}}$ est la symétrie glissée d'axe de glissage D_1 et de vecteur w.*

II. *Le groupe des isométries*

II.1. Structure de groupe

Proposition II.1. *L'ensemble des isométries de P forme un groupe que l'on note $Is = Is(P)$. En particulier :*

- *le produit (composé) de deux isométries est une isométrie ;*
- *une isométrie est une bijection de P dans P, elle admet une application réciproque qui est aussi une isométrie.*

Rappel II.1. Une application de P dans P est *bijective* si

- f est *injective* : pour tout $A \in P$, $B \in P$,
$$f(A) = f(B) \Rightarrow A = B;$$
- f est *surjective* : pour tout $C \in P$, il existe $A \in P$ tel que $f(C) = A$.

La chose délicate à montrer est qu'une isométrie f est *bijective*. Nous pourrons déduire ce fait de considérations d'algèbre linéaire. Mais nous allons ici le faire de manière géométrique.

DÉMONSTRATION. Soit f une isométrie.

f **est *injective*:** si $f(A) = f(B)$, comme $d(f(A), f(B)) = d(A,B)$, on a $d(A,B) = 0$ et donc $A = B$.

f **est *surjective*:** Nous allons utiliser les réflexions. Faites un dessin en suivant la démonstration

Soit (ABC) un triangle non dégénéré. Si $A = f(A)$, posons $f_1 = f$; si $A \neq f(A)$, soit Δ_1 la médiatrice de $[Af(A)]$ et posons $f_1 = s_{\Delta_1} \circ f$. Alors $f_1(A) = A$. Si $B = f_1(B)$, posons $f_2 = f_1$; sinon Δ_2 la médiatrice de $[Bf_1(B)]$. Comme f_1 est une isométrie, $d(A,B) = d(f_1(A), f_1(B)) = d(A, f_1(B))$, donc A est sur Δ_2. Posons alors $f_2 = s_{\Delta_2} \circ f_1$. On a

$$f_2(A) = A, f_2(B) = s_{\Delta_2}(f_1(B)) = B.$$

Finalement si $C = f_2(C)$, posons $f_3 = f_2$, sinon soit Δ_3 la médiatrice de $[Cf_2(C)]$. On montre de même que A et B sont sur Δ_3 ; on pose alors $f_3 = s_{\Delta_3} \circ f_2$. Dans tous les cas,

$$f_3(A) = A, f_3(B) = B, f_3(C) = C.$$

Montrons que f_3 est l'identité. Si M est un point quelconque, comme f_3 est une isométrie,

$$d(M,A) = d(f_3(M), f_3(A)), d(M,B) = d(f_3(M), f_3(B)), d(M,C) = d(f_3(M), f_3(C)).$$

Si $M \neq f_3(M)$, les trois points A, B et C sont sur la médiatrice du segment $[Mf_3(M)]$ et sont donc alignés, ce qui par hypothèse n'est pas vrai. Donc $f_3(M) = M$. Comme f_3 est l'identité et qu'une réflexion est une bijection et même une involution (comme $s^2 = Id$, l'image réciproque d'un point M par s est exactement $s(M)$), f est une bijection.

□

Remarque II.1. On a montré au passage les propositions suivantes :

Proposition II.2. *Une isométrie qui laisse fixe trois points non alignés est l'identité.*

Proposition II.3. *Toute isométrie peut être écrite comme le composé d'au plus trois réflexions.*

II.2. Les isométries positives

Proposition II.4. *Une isométrie conservant l'orientation et ayant un point fixe est une rotation.*

DÉMONSTRATION. Soit f une isométrie laissant fixe un point O et conservant l'orientation. En particulier, f n'est pas une réflexion. Supposons que f n'est pas l'identité.

Soit A un point d'image B distincte de A et r la rotation de centre O envoyant A sur B. Alors $g = r^{-1} \circ f$ laisse fixe O et A et préserve l'orientation.

Si g n'est pas l'identité, prenons M un point non fixe par g. Comme O et A sont à égale distance de M et de $f(M)$, la droite (OA) est la médiatrice de M et $f(M)$. Donc g coïncide avec la réflexion par rapport à la droite (OA) sur trois points, elle lui est donc égale. Comme g conserve l'orientation, ce n'est pas possible. Donc, *g est l'identité* et f est une rotation. □

Le composé de deux rotations est une rotation ou une translation.

DÉMONSTRATION. Nous l'avons déjà vu, mais donnons-en une démonstration légèrement différente. Soit f le composé de deux rotations. Nous avons montré par construction que soit f a un point fixe, soit f est une translation. Si elle a un point fixe, comme elle conserve l'orientation, f est une rotation. □

II.3. Liste des isométries du plan

Proposition II.5. *Toute isométrie est d'un des types suivants :*

(1) translation *par un vecteur $\vec{v}$;*
(2) rotation *d'angle* θ *de centre un point A ;*
(3) réflexion *par rapport à une droite D ;*
(4) symétrie glissée *obtenue en faisant une réflexion par rapport à une droite D, puis en translatant par un vecteur non nul parallèle à D.*

Les deux premiers types d'isométrie sont des isométries positives (conservant l'orientation) , les deux derniers sont des isométries négatives.

DÉMONSTRATION. On sait maintenant que toute isométrie est le composé d'au plus trois réflexions. Qu'obtient-on pratiquement ? On suppose dans la suite que f n'est pas l'identité.

- f est une réflexion.
- $f = s_{D_2} \circ s_{D_1}$ est le composé de deux réflexions par rapport à deux droites D_1 et D_2. Alors, f respecte l'orientation.
  Les droites D_1 et D_2 sont parallèles: Alors f est une translation.
  les droites D_1 et D_2 ne sont pas parallèles: Le point d'intersection A de D_1 et D_2 est fixe par f : $f(A) = A$. Soit B un point tel que $f(B)$ est différent de B. Soit r la rotation de centre A et envoyant B sur $f(B)$. Alors $g = r^{-1} \circ f$ a deux points fixes A et B. *Supposons que g ne soit pas l'identité* : soit C un point différent de $g(C)$. Alors, (AB) est la médiatrice de $[C, g(C)]$. Soit s la réflexion par rapport à la droite (AB). Alors, $s \circ g$ est une isométrie laissant fixe trois points. C'est donc l'identité. Mais comme g est une isométrie positive et s une isométrie négative, ce n'est pas possible. Donc, *g est l'identité* et $f = r$ est une rotation.
- $f = s_{D_3} \circ s_{D_2} \circ s_{D_1}$ est le composé de trois réflexions par rapport à trois droites D_1, D_2 et D_3. En particulier, f ne conserve pas l'orientation.
  Les droites D_1, D_2 et D_3 sont parallèles: L'isométrie $s_{D_2} \circ s_{D_1}$ est une translation de vecteur $2\vec{v}$ perpendiculaire à la direction des trois droites. Le composé avec s_{D_3} est encore une réflexion par rapport à la droite D_3 translaté de $-\vec{v}$
  Les droites D_1, D_2 sont parallèles: L'isométrie $s_{D_2} \circ s_{D_1}$ est une translation de vecteur $2\vec{v}$ perpendiculaire à la direction des deux droites D_1 et D_2. Le composé avec s_{D_3} est une réflexion glissée d'axe de glissage la droite translatée de D_3 par $\vec{w}$ où $\vec{w}$ est le projeté du vecteur $\vec{v}$ sur une perpendiculaire à D_3.
  Les droites D_1, D_3 sont parallèles: On traite ce cas comme le précédent.
  Les droites D_2, D_3 sont parallèles: Idem.
  Les droites D_1, D_2 et D_3 sont concourantes: Soit A le point d'intersection de D_1, D_2 et D_3. Le composé $s_{D_2} \circ s_{D_1}$ est une rotation de centre A que l'on peut écrire comme $s_{D_3} \circ s_L$ avec L une droite convenable : plus précisément L est la droite passant par A dont l'angle avec D_3 est égal à l'angle de D_1 avec D_2. On a alors

$$s_{D_3} \circ s_{D_2} \circ s_{D_1} = s_{D_3} \circ s_{D_3} \circ s_L = s_L$$

  Donc, f est une réflexion. L'axe de symétrie passe par A et est la droite des milieux $[Mf(M)]$. Pendre par exemple pour M un point de D_1.

Les droites D_1, D_2 et D_3 ne sont pas concourantes: Le composé $s_{D_2} \circ s_{D_1}$ est une rotation de centre le point d'intersection A de D_1 et D_2 et d'angle non nul. On peut l'écrire comme $s_{D'_3} \circ s_L$ avec D'_3 la droite parallèle à D_3 passant par A et L une droite convenable : plus précisément L est la droite passant par A dont l'angle avec D'_3 est égal à l'angle de D_1 avec D_2. On a alors

$$s_{D_3} \circ s_{D_2} \circ s_{D_1} = s_{D_3} \circ s_{D'_3} \circ s_L = t_v \circ s_L$$

où v est un vecteur perpendiculaire à D_3. Ce vecteur n'est pas perpendiculaire à L car L n'est pas parallèle à D'_3. Donc, f est une réflexion glissée.
L'axe de glissage passe la projection de $D_2 \cap D_1$ sur D_3 et par la projection de $D_2 \cap D_3$ sur D_1. En effet, l'image de $D_2 \cap D_1$ par f est son symétrique par rapport à la droite D_3 et l'axe de glissage passe par le milieu de $[Mf(M)]$. L'image par f du symétrique de $D_3 \cap D_2$ par rapport à D_1 est $D_3 \cap D_2$.

□

Remarque II.2. Le composé de trois réflexions est une réflexion si et seulement si les droites sont parallèles ou concourantes. Sinon, c'est une symétrie glissée de vecteur de translation non nul.

II.4. Exercices

Exercice 38. Toute isométrie est le composé d'une isométrie ayant un point fixe et d'une translation.

Exercice 39. Le composé de deux rotations de centres distincts est une isométrie positive. C'est donc soit une translation, soit une rotation. Trouver géométriquement son centre ou le vecteur de translation.

Exercice 40. Le composé d'une rotation non triviale et d'une translation est une isométrie positive. C'est une rotation. Trouver géométriquement son centre.

Exercice 41. Caractériser le composé d'une rotation et d'une réflexion.

Exercice 42. Ecrire une rotation comme composé de réflexions.

Exercice 43. Tracer l'axe du composé de trois réflexions.

III. *Point de vue de l'algèbre linéaire*

III.1. Matrices orthogonales

Si A est une matrice, la matrice *transposée* est par définition la matrice obtenue en échangeant les lignes et les colonnes :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Les matrices des rotations et des réflexions vérifient $AA^t = A^tA = id$.

Définition III.1. Une matrice est dite *orthogonale* si $AA^t = A^tA = id$.

Proposition III.1. *L'ensemble des matrices orthogonales forme un groupe pour le produit des matrices. On le note $O_2(\mathbb{R})$.*

Proposition III.2. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *A est orthogonale ;*
(2) *les colonnes de A sont des vecteurs unitaires (deux à deux) orthogonaux ;*
(3) *l'application linéaire f de matrice A dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ vérifie*

$$\langle f(\vec{u}), f(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle.$$

L'application linéaire f est dite orthogonale.

Proposition III.3. *Le déterminant d'une application linéaire orthogonale est égal à ± 1.*

Proposition III.4. *Les applications linéaires orthogonales de déterminant 1 sont les rotations de $\mathbb{R}^2$ (laissant fixe O).*

III.2. Isométries

Proposition III.5. *Soit f une application de P dans P. Alors, il y a équivalence entre les propriétés suivantes :*

(1) *f est une isométrie fixant l'origine O ;*
(2) *f préserve le produit scalaire :*

$$\langle \overrightarrow{Of}(A), \overrightarrow{Of}(B) \rangle = \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle$$

(3) *f est la multiplication à gauche par une matrice orthogonale : si $A = (x_A, y_A)$ et $B = f(A) = (x_B, y_B)$, alors*

$$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$$

avec $M \in O_2(\mathbb{R})$ (application linéaire orthogonale).

IV. *Composé et transformé*

On peut composer deux isométries mais il y a une opération plus « naturelle » : transformer une isométrie par une autre.

Définition IV.1. Soit g une isométrie. On appelle

- *transformée par g de la translation* de vecteur $\vec{v}$ la translation de vecteur $g(\vec{v})$.
- *transformée par g de la rotation* de centre A et d'angle θ la rotation de centre $g(A)$ et d'angle θ ;
- *transformée par g de la réflexion orthogonale* d'axe D la réflexion orthogonale d'axe $g(D)$;

On note f^g la transformée de f par g. On parle aussi de conjuguée Cette opération est beaucoup plus simple que la composée ! Il suffit de transformer les « invariants ». Dans $Is(P)$, on peut quand même interpréter la transformée comme un composé :

Proposition IV.1. *Le transformé de f par g est $g \circ f \circ g^{-1}$. Ainsi :*

- *Soient t une translation de vecteur $\vec{v}$ et $r_{A,\theta}$ la rotation de centre A et d'angle θ. Soit B l'image de A par t_v . Alors*

$$t_v \circ r_{A,\theta} \circ t_{-v} = r_{B,\theta}$$

  autrement dit $t_v \circ r_{A,\theta} = r_{B,\theta} \circ t_v$.
- *Soient t_v la translation de vecteur $\vec{v}$ et s_D la réflexion par rapport à D. Soit D' l'image de D par la translation t_v. Alors*

$$t_v \circ s_D \circ t_{-v} = s_{D'}$$

  autrement dit, $t_v \circ s_D = s_{D'} \circ t_v$.
- *On note s_D la réflexion orthogonale par rapport à la droite D, t_v la translation de vecteur $\vec{v}$, s_A la symétrie centrale par rapport à un point A du plan.*
  - *si $\vec{v}$ est parallèle à D,*

$$s_D \circ t_v \circ s_D^{-1} = t_v$$

    autrement dit $s_D \circ t_v = t_v \circ s_D$
  - *si $\vec{v}$ est perpendiculaire à D,*

$$s_D \circ t_v \circ s_D^{-1} = t_{-v}$$

    autrement dit $s_D \circ t_v = t_{-v} \circ s_D$

–
$$s_A \circ t_v \circ s_A^{-1} = t_{-v}$$

autrement dit $s_A \circ t_v = t_{-v} \circ s_A$

Si F est une figure, pour trouver le transformé de F par f^g, on commence par prendre l'image réciproque de F par g (on déplace la figure). Puis on applique par f, puis on transforme par g (on la remet en place).

On peut utiliser le fait que le carré d'une réflexion est l'identité pour simplifier les formules.

V. *Formulaires*

On note s_D la réflexion orthogonale par rapport à la droite D, t_v la translation de vecteur $\vec{v}$, s_A la symétrie centrale par rapport à un point A du plan.

Exercice 44. Démontrer les formules suivantes (et faire un dessin)

(1) $s_A \circ s_B = t_{2\overrightarrow{BA}}$;
(2) si D et D' sont deux droites parallèles, $s_D \circ s_{D'} = t_{2\overrightarrow{KH}}$ avec $K \in D'$, $H \in D$ et (KH) perpendiculaire aux deux droites ;
(3) Si $A \in D$, $s_D \circ s_A = s_A \circ s_D = s_\Delta$ où Δ est la droite perpendiculaire à D passant par A ;
(4) Si $A \notin D$, $s_D \circ s_A = t_v \circ s_\Delta$ où Δ est la droite perpendiculaire à D passant par A, $\vec{v} = 2\overrightarrow{AH}$ et H la projection orthogonale de A sur D.
(5) Si D_1 et D_2 sont des droites affines passant par un point A et θ l'angle orienté de D_1 et de D_2,
$$s_{D_2} \circ s_{D_1} = r_{A,2\theta}.$$

Exercice 45. Soit A un point de P et g une isométrie. On peut écrire de manière unique g sous la forme $t_v \circ g_A$ où t_v est une translation et où g_A est une isométrie laissant fixe le point A. Vérifier que $v = \overrightarrow{Ag(A)}$.

Pratiquement :

- Si g est une translation, on prend pour g_A l'identité et pour translation la translation g.
- Si g est une rotation de centre B, on prend pour g_A la rotation de centre A et pour translation la translation de vecteur $\overrightarrow{Ag(A)}$.
- Si g est une réflexion d'axe D, on prend la droite D_A parallèle à D et passant par A, g_A la réflexion d'axe D_A et pour translation la translation de vecteur $2\vec{w}$ où $\vec{w} = \overrightarrow{AH}$ est le vecteur perpendiculaire aux droites D et D_A avec H sur D.

- Si g est une réflexion glissée d'axe D et de vecteur $\vec{v}$ (parallèle à D), on prend la droite D_A parallèle à D et passant par A, g_A la réflexion d'axe D_A et pour translation la translation de vecteur $2\vec{w}+\vec{v}$ où $\vec{w}=\overrightarrow{AH}$ est le vecteur perpendiculaire aux droites D et D_A avec H sur D.

VI. *Exercices*

Exercice 46. Soit s la réflexion d'axe la droite d'équation $y-x=1/2$. Pour chacune des translations t de vecteur $(1,1)$, $(1,-1)$, $(2,0)$, soit f l'isométrie composée $s\circ t$. Déterminer la nature de f et ses éléments caractéristiques.

Exercice 47. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$ et s la réflexion d'axe la droite d'équation $x=1/2$. Soit f l'isométrie composée $f\circ s$. Montrer que f est une réflexion glissée. Préciser l'axe D et le vecteur de translation.

Exercice 48.

(1) Soit $A=(1,2)$ et r la rotation de centre A et d'angle $2\pi/3$. On écrit r comme le composé $t_{\vec{v}}\circ r_O$ d'une translation de vecteur $\vec{v}$ et d'une rotation de centre O. Quel est l'angle de la rotation r_O ? Calculer le vecteur $\vec{v}$. Faire de même en écrivant $r=r_O\circ t_{\vec{w}}$.
(2) Faire de même avec la rotation de centre $B=(0,-1)$ et de d'angle $\pi/4$: $r'=t_{\vec{v}'}\circ r'_O$
(3) Qu'obtient-on pour $r\circ r'=t_{\vec{a}}\circ r''_O$?
(4) Ecrire la rotation r précédente comme composé de deux réflexions.

CHAPITRE 4

Groupes et groupes d'isométrie

Nous avons des groupes concrets à notre disposition, nous allons revenir aux groupes d'isométries du plan, autrement dit les *groupes de symétrie* d'un *système*. Dans ce paragraphe, nous n'étudierons de tels groupes que lorsqu'ils sont finis.

Les groupes que nous venons de rencontrer sont

(1) $Is_A(P)$ le groupe des isométries de P laissant fixe A (dans sa version vectorielle, $O_2(\mathbb{R})$ le groupe des isométries de $\mathbb{R}^2$ laissant fixe O) ;
(2) $Is_A^+(P)$ le groupe des rotations de P laissant fixe A, ou ce qui revient au même le groupe des isométries positives de P laissant fixe A ;
(3) $Is(P)$ le groupe des isométries ;
(4) $Is^+(P)$ le groupe des isométries positives de P (rotation-translation) ;
(5) $GL_2(\mathbb{R})$ le groupe linéaire (le groupe des applications linéaires bijectives de $\mathbb{R}^2$) ;
(6) $GA(P)$ le groupe affine des composés de translations et d'applications linéaires (laissant fixe O).

Rappelons maintenant la définition d'un groupe de symétrie.

I. *Groupes d'isométries ou de symétrie*

Définition I.1. Soit F un ensemble de points dans le plan. L'ensemble des *isométries* conservant F est un groupe et est appelé *groupe de symétrie* ou *groupe d'isométries* de F. On le note ici $Is(F)$.

Remarque I.1. Attention, un groupe de symétrie n'est pas formé que de symétries. Il n'est par contre formé que d'isométries (en tout cas, dans notre contexte).

Exercice 49. Quel est le groupe de symétrie d'un point A ? Quel est le lien entre le groupe de symétrie de A et celui d'un autre point B ?

Exercice 50. Quel est le groupe de symétrie de la droite de direction $\vec{i}$ (axe des x) ? Quel est le groupe de symétrie de la droite d'équation $ax+by=0$? $ax+by=c$?

Si F est fini, numérotons ses points $A_1,\ldots,A_n$ ou même 1, ..., n. Soit g un élément de $Is(F)$. On peut alors définir la permutation des points de F

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_n \\ g(A_1) & g(A_2) & \ldots & g(A_1) \end{pmatrix}$$

On a ainsi une action de $Is(F)$ sur l'ensemble $\{A_1, ..., A_n\}$.

Définition I.2. Une *action* d'un groupe G sur un ensemble X est une application $G \times X \to X$ qui vérifie les propriétés suivantes

- $e * x = x$ pour $x \in X$;
- $(g_1 g_2) * x = g_1 * (g_2 * x)$ pour $x \in X$, $g_1 \in X$, $g_2 \in X$.

On dit aussi que G *opère* sur l'ensemble X.

Exemple I.2. Nous n'avons vu en fait ici que des groupes opérant sur un ensemble. Il s'agit d'une notion très naturelle qu'on utilise sans le savoir :

- $Is(F)$ opère sur F.
- Le groupe du carré opère sur l'ensemble S des sommets d'un carré.
- Le groupe du carré opère aussi sur l'ensemble C des côtés du carré.
- Le groupe du carré opère sur l'ensemble CS des couples formés d'un côté et d'un de ses sommets. Combien d'éléments l'ensemble CS a-t-il ?

II. *Sous-groupes et ordre*

Définition II.1. Soit G un groupe muni d'une loi $*$. Un *sous-groupe* est un sous-ensemble H de G tel que

(1) si x et y appartiennent à H, $x * y$ appartient à H ;
(2) l'élément neutre de G appartient à H ;
(3) si x appartient à H, x^{-1} appartient à H .

Autrement dit, H muni de la loi $*$ est un groupe.

Exercice 51.

- L'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $t \in \mathbb{R}$ est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$.
- L'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$ avec $u \in \mathbb{R}^*$ et $v \in \mathbb{R}^*$ est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$.

Définition II.2. L'*ordre* d'un élément g d'un groupe G est le plus petit entier n strictement positif tel que $g^n = e$ s'il existe et ∞ sinon.

Exercice 52.

- Soient s_1 et s_2 deux réflexions d'axe D_1 et D_2. Quel est l'ordre de s_1 et s_2 ? de leur composé ?
- Soit $r_{A,\theta}$ une rotation d'angle $2\pi/n$ et t_v une translation. Calculer l'ordre de $r_{A,\theta} \circ t_v$.
- Calculer l'ordre de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, de $\begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & -\sin\frac{2\pi}{n} \\ \sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} \end{pmatrix}$, de $\begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & \sin\frac{2\pi}{n} \\ \sin\frac{2\pi}{n} & -\cos\frac{2\pi}{n} \end{pmatrix}$.

Proposition II.1. *L'ordre d'un élément d'un groupe fini divise l'ordre du groupe.*

III. *Sous-groupe engendré*

Définition III.1. Soit U un sous-ensemble d'un groupe G. Le *sous-groupe de G engendré par U* est le plus petit sous-groupe de G contenant U. On dit aussi que G est *engendré* par U.

Exercice 53. Quel est le sous-groupe de $Is(P)$ engendré par toutes les réflexions de P ? par les symétries centrales ?

Exercice 54. Si T est un triangle équilatéral de centre de gravité A, quel est le sous-groupe de $Is(T)$ engendré par la rotation d'angle $2\pi/3$ de centre A ? Par deux de ses réflexions ?

Exercice 55. Si R est un rectangle, donner un ensemble de générateurs de $Is(R)$ (le moins possible). Faire de même pour un carré.

Exercice 56. Etudier le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$ engendré par les matrices $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Combien a-t-il d'éléments ? Quel ordre ont-ils ? Donner la table de multiplication.

IV. *Groupe cyclique*

Définition IV.1. Un groupe *cyclique* est un groupe engendré par un élément.

Exemple IV.1. Le groupe C_n engendré par la rotation r de centre A et d'angle $2\pi/n$ est un groupe d'ordre n. Compléter la table de groupe pour $n = 7$, pour $n = 8$:

	id	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
id							
r							
r^2							
r^3							
r^4							
r^5							
r^6							

	id	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7
r								
r^2								
r^3								
r^4								
r^5								
r^6								
r^7								

V. *Morphismes de groupes*

Définition V.1. Un *homomorphisme de groupes* d'un groupe G_1 dans un groupe G_2 (notés tous deux multiplicativement) est une application f de G_1 dans G_2 telle que

$$f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2)$$

pour tous g_1, g_2 dans G_1.

Un *isomorphisme de groupes* est un homomorphisme de groupes qui est bijectif. On dit alors que les groupes G_1 et G_2 sont *isomorphes*.

Exercice 57. Soient A et B deux points de P. Soient $Is(A)$ et $Is(B)$ les groupes de symétrie laissant fixe A et B respectivement. Déterminer explicitement un isomorphisme de $Is(A)$ sur $Is(B)$.

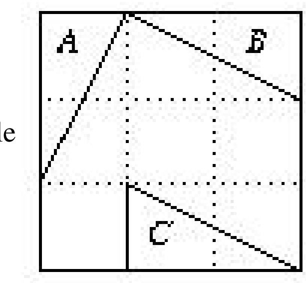
Exemple V.1. Si G agit sur un ensemble X, l'application

$$G \to Bij(X)$$

qui à $g \in G$ associe la bijection de X :

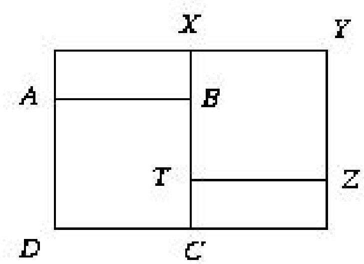
$$x \in X \mapsto g\dot{x} \in X$$

est un homomorphisme de groupes.



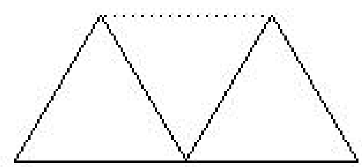
Exercice 58. Décrire trois rotations qui envoient respectivement le triangle A sur le triangle B, le triangle B sur le triangle C et le triangle C sur le triangle A.

Exercice 59.



Dans le dessin suivant, $ABCD$ et $XYZT$ sont des carrés égaux. Trouver combien d'isométries envoient un des carrés sur l'autre et les décrire :

Exercice 60.



Dans le dessin suivant, tous les triangles sont équilatéraux. Trouver combien d'isométries envoient le triangle de gauche sur le triangle de droite et les décrire :

VI. *Sous-groupes invariants*

Définition VI.1. Un *sous-groupe normal* ou *sous-groupe distingué* ou *sous-groupe invariant* H d'un groupe G est un sous-groupe de G tel que

$$gHg^{-1} = H$$

pour tout $g \in G$.

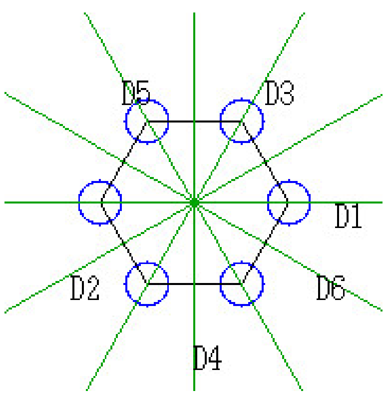
Exemple VI.1.

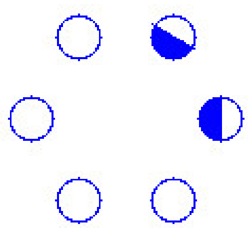
- Le sous-groupe des rotations $Is_A^+(P)$ est un sous-groupe distingué du groupe $Is_A(P)$, puisque le transformé d'une rotation de centre A par une isométrie laissant fixe A est encore une rotation de centre A.
- Par contre le transformé d'une rotation de centre A par une translation par un vecteur non nul n'est pas une rotation de centre A. Donc $Is_A^+(P)$ n'est pas distingué dans $Is(P)$.

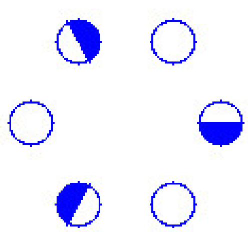
Exercice 61. Pour les groupes $GL_2(\mathbb{R})$, $GA(P)$, $Is_A(P)$, $Is_A^+(P)$, $Is^+(P)$, $Is(P)$, écrire les relations d'inclusion qui existent entre eux et pour chacune d'entre elles, dire si le plus petit est un sous-groupe distingué du plus gros.

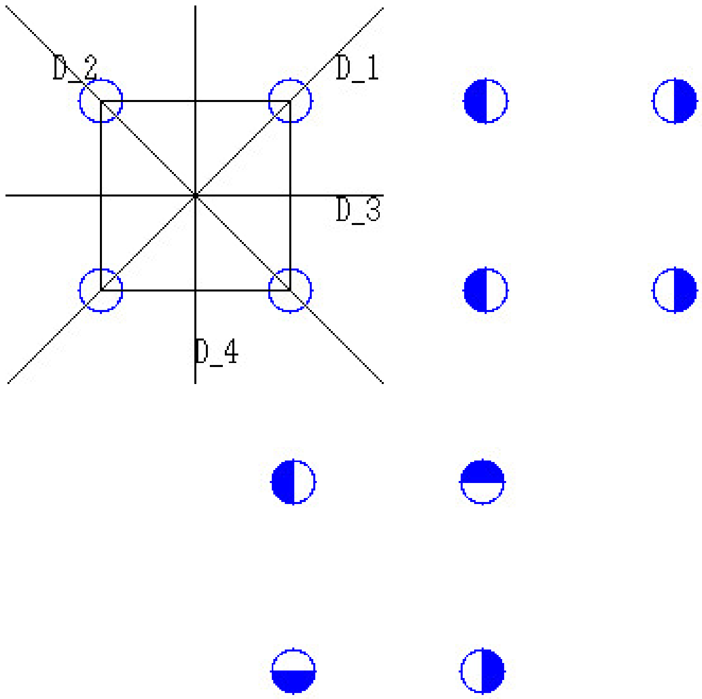
Exercice 62. Soit F une figure (un ensemble de points). Alors $gIs(F)g^{-1} = Is(g(F))$. Soit G un sous-groupe de symétrie contenant $Is(F)$. Alors, $Is(F)$ est distingué dans G si et seulement si F et $g(F)$ ont même groupe de symétrie pour tout $g \in G$.

Soit $Is(F)$ le groupe d'isométrie du dessin de gauche. Dans les dessins de droite, on a brisé la symétrie ? Quel est le sous-groupe de symétrie ? Est-il distingué dans $Is(F)$?









Un groupe de symétrie qui est fini fixe toujours un point du plan et on peut complétement déterminer sa structure. C'est ce qu'on va faire dans le paragraphe suivant.

VII. *Les groupes d'isométries du plan qui sont finis*

Proposition VII.1. *Soit G un groupe fini du groupe des isométries de P. Il existe un point A de P qui est fixe par tous les éléments de G :*

$$g(A) = A \qquad \forall g \in G.$$

DÉMONSTRATION.

- On prend un point B dans le plan et on construit les images de B par tous les éléments de G. Comme G est fini formé de n isométries g_1, ..., g_n, on obtient ainsi n points

$$B_1 = g_1(B), B_2 = g_2(B), \dots, B_n = g(B).$$

  Soit A l'isobarycentre de B_1, ..., B_n.
- Appliquons à A n'importe lequel des éléments g de G. Alors, l'ensemble des gg_j est l'ensemble des éléments de G qui se trouvent sur la ligne correspondant à g dans le tableau de la loi, c'est donc en fait exactement tous les g_j mais dans un ordre différent. Donc l'isobarycentre des $g(B_j)$ est l'isobarycentre des B_j c'est-à-dire B.
- Il reste à voir que l'image par g de A est aussi l'isobarycentre des $g(B_i)$. Toute isométrie est le composé d'une translation et d'une isométrie laissant fixe un point. On vérifie que cela est vrai pour deux telles isométries et donc pour leur composé.
- Donc $g(A) = A$.

□

Théorème VII.2. *Soit G un sous-groupe fini du groupe des isométries laissant fixe un point A. Alors, G est l'un des groupes suivants pour un entier n*

- *le sous-groupe de $Is^+(P)$ engendré par la rotation de centre A et d'angle $2\pi/n$;*
- *le sous-groupe de $Is(P)$ engendré par la rotation de centre A et d'angle $2\pi/n$ et une réflexion axiale d'axe passant par A.*

Corollaire VII.3. *Si le groupe de symétrie G d'une figure est fini, il existe un point du plan A et un entier n tel que G soit*

- *soit le sous-groupe de $Is^+(P)$ engendré par la rotation de centre A et d'angle $2\pi/n$,*
- *soit le sous-groupe de $Is(P)$ engendré par la rotation de centre A et d'angle $2\pi/n$ et une réflexion axiale d'axe passant par A (on l'appelle* groupe diédral*).*

Ainsi, si le groupe de symétrie d'une figure est fini et s'il contient une réflexion, c'est un groupe diédral.

VIII. *Exercices*

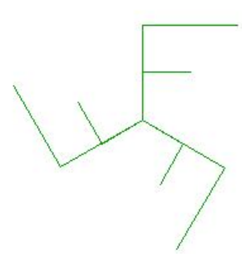
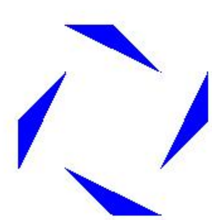
Exercice 63. Le groupe du deuxième type (groupe diédral D_n) est un groupe d'ordre $2n$. Construire sa table de groupe pour $n = 4$.

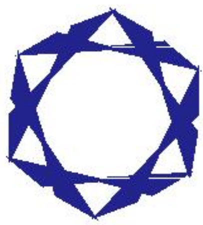
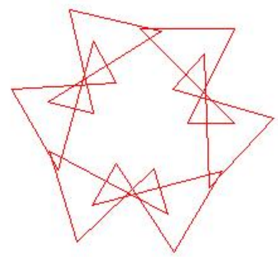
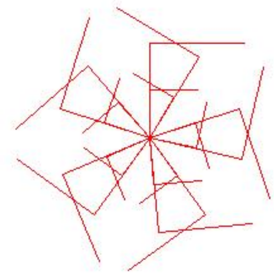
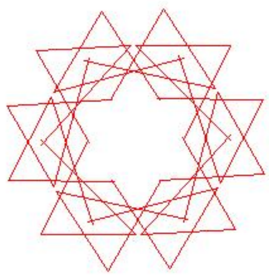
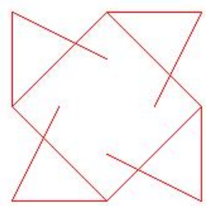
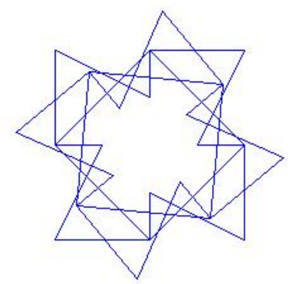
	id	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
id								
r								
r^2								
r^3								
s								
sr^2								
sr^3								
sr^4								

	id	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
id										
r										
r^2										
r^3										
r^4										
s										
sr										
sr^2										
sr^3										
sr^4										

Exercice 64. De quel type est le groupe du triangle ? du rectangle ? du losange ? d'un pentagone régulier ?

Exercice 65. Quel est le groupe de symétrie des figures suivantes ? (on admet que ce groupe de symétrie est fini).

Exercice 66. Dessiner un ensemble F dont le groupe d'isométries est formé exactement des rotations d'angle un multiple entier de $2\pi/5$ et de centre un point O.

Exercice 67. Dessiner un ensemble F dont le groupe d'isométries positives est formé exactement des rotations d'angle un multiple entier de $2\pi/5$ de centre O et dont le groupe des isométries contient une symétrie axiale passant par O. Quel est le nombre d'éléments du groupe d'isométries de F ?

IX. *Coloriages*

Nous allons ici montrer quelques coloriages d'un polygone P_n régulier à n côtés compatibles (en un sens à définir) avec son groupe de symétrie.

IX.1. Que colorier On peut imaginer de colorier ses sommets ou ses côtés. Mais artistiquement, ce n'est pas très satisfaisant. Aussi allons-nous d'abord associer à un sommet ou à un côté un petit triangle ou quadrilatère dont un des sommets est au centre de gravité du polygone. On trouve n triangles. Le groupe de symétrie de P_n est d'ordre $2n$. Le stabilisateur d'un sommet, c'est-à-dire le sous-groupe des isométries qui stabilisent (laissent fixe) ce sommet, est formé de l'identité et de la symétrie par rapport à la droite passant par ce sommet et par le centre de P_n.

On peut aussi vouloir colorier les couples formés d'un sommet et d'un côté qui le contient. On obtient alors $2n$ triangles.

Exercice 68. Prenons un couple (x, y) de sommets ou de côtés. Montrer qu'il existe une isométrie de $Is(P_n)$ qui envoie x sur y.

On dit que $Is(P_n)$ agit *transitivement* sur l'ensemble des sommets (ou l'ensemble des côtés).

IX.2. Comment colorier Nous allons colorier ces triangles de manière *régulière*, ce qui signifie que ce coloriage doit être compatible avec la définition abstraite suivante :

Définition IX.1. Soit G un groupe opérant transitivement sur un ensemble X, (si x et y sont dans X, y est l'image de x par un élément de G). Un *coloriage* de X compatible avec G est une famille de sous-ensembles X_i de X :

- formant une partition : la réunion des X_i est X et les ensembles X_i sont disjoints deux à deux : $X_i \cap X_j = \emptyset$;
- tel que pour tout $g \in G$ et pour tout i, $g(X_i)$ est un des X_j de la famille.

IX.3. Stabilisateur d'une couleur Si x est dans X, on note $X(x)$ la "couleur" de x, c'est-à-dire l'ensemble X_i auquel appartient x. On peut associer à ce coloriage un sous-groupe de $Is(P_n)$: le stabilisateur d'une couleur, c'est-à-dire, si on prend comme *couleur* X_i, l'ensemble des $h \in Is(P_n)$ tel que $h(X_i) = X_i$. On le note $Stab(X_i)$.

On a la propriété suivante

Proposition IX.1. *Soient $x_0 \in X_i$ et $g \in Is(P_n)$. Si gx_0 appartient à X_i, alors g appartient à $Stab(X_i)$.*

DÉMONSTRATION. Puisque x_0 et gx_0 appartiennent à X_i, l'intersection $X_i \cap gX_i$ est non vide. Donc par définition d'un coloriage, $X_i = gX_i$ et g est donc dans le stabilisateur de X_i.

□

En particulier, si $gx_0 = x_0$, c'est-à-dire si g est dans le stabilisateur de x_0, g est dans le stabilisateur de la couleur de x_0 :

$$Stab(x_0) \subset Stab(X(x_0)).$$

Choisissons une couleur X_0 et soit $H = Stab(X_0)$ son stabilisateur. Les autres couleurs X_i sont de la forme $g_i X_O$ pour un certain $g_i \in Is(P_n)$ et le stabilisateur de X_i est

$$Stab(X_i) = g_i Stab(X_0) g_i^{-1}.$$

IX.4. Comment construire les coloriages

Nous allons donner une méthode de construction de coloriages de X pour X l'ensemble des sommets, ou des côtés, ou des couples sommets/côtés, en partant d'un sous-groupe de $Is(P_n)$.

- Choisissons un élément x_0 de X et un sous-groupe H de $Is(P_n)$. D'après ce qu'on vient d'étudier, pour que H puisse être le stabilisateur de la couleur de x, il est nécessaire que H contienne le stabilisateur de x_0 (qui est le sous-groupe engendré par une réflexion dans le cas des sommets ou des côtés et le groupe trivial dans le cas des sommets/côtés). On le suppose donc.

- Soit $X_0 = Hx_0$. Vérifions que les gX_0 pour $g \in Is(P_n)$ vérifient la propriété des coloriages. Notons les ensembles distincts $X_i = g_iX_0$ pour $i = 1...m$. Comme $Is(P_n)$ agit transitivement sur X, la réunion des gX_0 est tout X. Il reste à montrer que si $gX_i \cap X_j$ est non vide, alors $gX_i = X_j$. Soit y un élément de $gX_i \cap X_j$, on a donc en écrivant tout ce qu'on sait,

$$y = gg_ih_1x_0 = g_jh_2x_0$$

avec h_1 et h_2 appartenant à H. D'où

$$h_2^{-1}g_j^{-1}gg_ih_1x_0 = x_0$$

ce qui implique que $h_2^{-1}g_j^{-1}gg_ih_1$ appartient au stabilisateur de x_0, donc à H. Donc, $h = g_j^{-1}gg_i \in H$ et

$$gg_iX_0 = g_jhX_0 = g_jX_0.$$

- Ainsi, les sous-ensembles (gHx_0) pour $g \in Is(P_n)$ forment bien un coloriage de X.

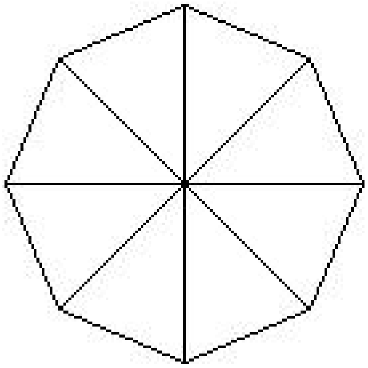
IX.5. Exercices

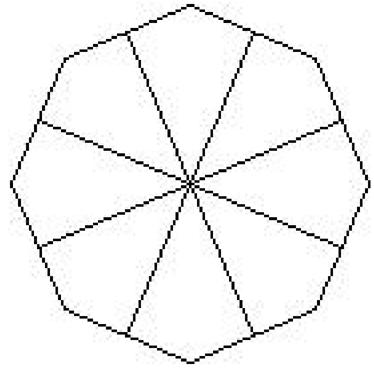
Exercice 69. Trouver tous les coloriages obtenus ainsi pour un carré, un hexagone, un nonagone. Dans chacun des cas, regarder si le stabilisateur d'une couleur est indépendant de la couleur ou non. Dans le premier cas, quelle propriété de ce sous-groupe en découle-t-il ?

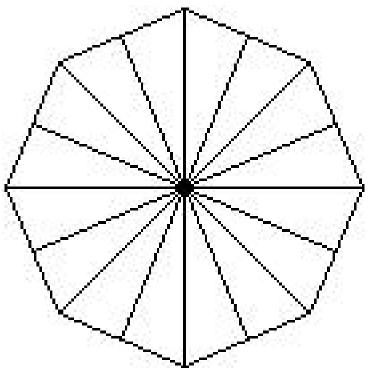
Exercice 70. WIMS : Coloriages de polygones

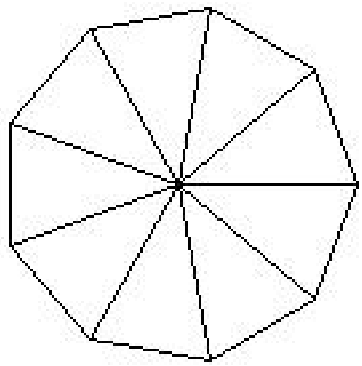
Exercice 71. Pour récapituler :

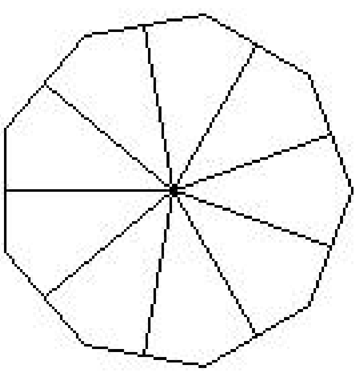
(1) On considère un polygone régulier P à 9 côtés. Décrire son groupe de symétrie $Is(P)$ (nom, nombre d'éléments, générateurs, ...)
(2) On trace les triangles dont un sommet est au centre du polygone et tel que le côté opposé à ce sommet soit un demi-côté (allant d'un sommet au milieu des côtés dont il est l'extrémité). Combien y a-t-il de tels triangles ?
(3) Soit r une rotation d'angle $2\pi/3$ et H le sous-groupe qu'il engendre dans $Is(P)$. Dessiner un coloriage de ces triangles construit associé à H. Combien de couleurs faut-il ? Dessiner tous les coloriages à deux ou trois couleurs compatibles avec $Is(P)$ et donner le stabilisateur d'une des couleurs dans chaque cas.

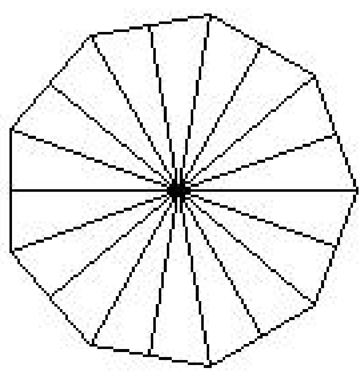












Un groupe d'isométries qui n'est pas fini n'a pas toujours de points fixes : prenons par exemple le groupe des isométries d'une droite du plan. Pour l'étudier, on introduit la notion de groupe ponctuel (ou groupe vectoriel).

X. *Groupe ponctuel*

Soit A un point de P, g et g' deux isométries. Ecrivons-les comme $g = t_v \circ g_A$ et $g' = t_{v'} \circ g'_A$ avec v et v' des vecteurs, g_A et g'_A des isométries laissant fixe A. Cette écriture est unique.

Proposition X.1.
(1) *Comportement par composition : $g \circ g' = t_{\vec{w}} \circ g_A \circ g'_A$ pour un vecteur $\vec{w}$.*
(2) *Soit G un groupe d'isométries et soit $G_{ponct,A}$ l'ensemble des isométries laissant fixe A obtenues de la manière précédente à partir des éléments de G. Alors, $G_{ponct,A}$ est un groupe.*
(3) *Si B est un autre point de P et si t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ (ainsi, $t(A) = B$), on a*

$$G_{ponct,B} = t \circ G_{ponct,A} \circ t^{-1}.$$

Exercice 72. Soit R un rectangle. Soit $G = Is(R)$ son groupe de symétrie. Si A est le point d'intersection de ses diagonales, que vaut $G_{ponct,A}$? Si B est un point qui n'est pas le point d'intersection de ses diagonales, que vaut $G_{ponct,B}$? Quel est son ordre ?

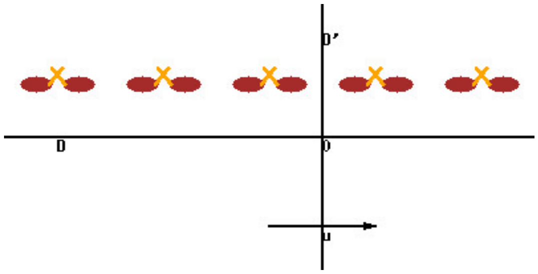
Attention, il n'y a aucune raison que $G_{ponct,A}$ soit contenu dans G. Un premier exemple de cette situation est le suivant : soit G le groupe engendré par la rotation de centre B et d'angle $2\pi/5$; $G_{ponct,A}$ est engendré par la rotation de centre A et d'angle $2\pi/5$. Mais cet exemple est un peu artificiel ...

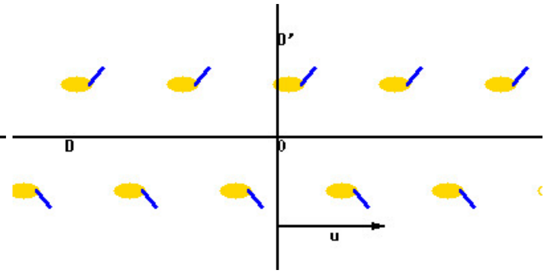
Définition X.1. Soit G un groupe d'isométries et O un point du plan. Le *groupe de symétrie ponctuel* ou *groupe de symétrie vectoriel* est par définition l'ensemble des isométries g_O pour $g \in G$.

Si l'on peut, on choisit l'origine de manière à simplifier les calculs. Modulo conjugaison, le groupe ponctuel qu'on note abusivement G_{ponct} n'en dépend pas.

Par exemple, si F est une figure dont le groupe d'isométrie est **fini**, le meilleur choix pour calculer son groupe ponctuel est bien sûr le centre de gravité G de F. Avec ce choix, $Is_{ponct,G}(F) = Is(F)$.

Exercice 73. Calculer le groupe de symétrie $Is(F)$ de chacune des frises F (infinie) suivantes. Quel est leur groupe de symétrie ponctuel ? Y a-t-il dans $Is(F)$ un sous-groupe fini non trivial ?


D'
D
0
u


D'
D
0
u